

Riemannův určitý integrál – 2

Jiří Fišer

KMA, PŘF UP Olomouc

LS10

Základní vlastnosti určitého integrálu

VÝPOČET URČITÝCH INTEGRÁLŮ

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec.

Výpočet užitím substituce nebo per partes Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat tak, že nejprve vypočteme neurčitý integrál a pak se vrátíme k určitému, nebo můžeme provést *transformaci mezí*.

Věta

Je-li $f \in R(\langle a, b \rangle)$, φ má spojitou derivaci na $\langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, pak platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt.$$

Základní vlastnosti určitého integrálu

Výpočet určitých integrálů — ÚLOHA NA TRANSFORMACI MEZÍ

Úloha

Vypočtěte $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Řešení.

$$I = \left[\begin{array}{ll} x = \sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = \cos t dt & x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$



Základní vlastnosti určitého integrálu

Výpočet určitých integrálů

Podobně pro per partes platí

Věta

Jsou-li u' , v' spojité na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Základní vlastnosti určitého integrálu

Výpočet určitých integrálů — ÚLOHA NA PER PARTES

Úloha

Vypočtěte $I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Řešení.

$$I = \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = [-\cos x]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \dots = \pi.$$



Integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pojem určitého integrálu lze jednoduše rozšířit i na komplexní funkce reálné proměnné. Nechť $f_1, f_2 \in R(\langle a, b \rangle)$ a $f = f_1 + if_2$. Pak definujeme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} f_2(t) dt.$$

Úloha

Vypočtete $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} dt$.

Řešení.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin t) dt = [\sin t - i \cos t]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i.$$



Věta (o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť $f \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $m \leq f(x) \leq M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu(b - a).$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(\xi).$$

Princip důkazu.

Nerovnost $m \leq f(x) \leq M$ integrujeme na $\langle a, b \rangle$ a výraz

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ označíme μ . Je-li m, M minimum a maximum funkce f spojitě na $\langle a, b \rangle$, pak podle věty o mezihodnotě nabývá f hodnoty $\mu \in \langle m, M \rangle$ v nějakém bodu $\xi \in \langle a, b \rangle$. □

Věta (zobecněná věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$, $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$. Pak platí

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx$$

a existuje číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \mu \int_a^b g(x) \, dx.$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx.$$

Integrál jako funkce horní meze

- Je-li $f \in R(\langle a, b \rangle)$,
- pak pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $f \in R(\langle a, x \rangle)$ a

$$\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$$

je integrál, který je **funkcí** své **horní meze** x .

- Vzhledem k rozšíření definici integrálu lze za dolní mez zvolit libovolné číslo $c \in \langle a, b \rangle$.

Integrál jako funkce horní meze

Věta

Nechť funkce $f \in R(\langle a, b \rangle)$, $c \in \langle a, b \rangle$.

1) Pak funkce

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a

2) v každém bodě $x_0 \in \langle a, b \rangle$, v němž je f spojitá, má Φ derivaci (v krajních bodech a, b jednostrannou), pro niž $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Integrál jako funkce horní meze

Princip důkazu.

ad 1)

$$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \mu h,$$

kde $\mu \in \langle m, M \rangle$ je střední hodnota, odkud plyne spojitost funkce Φ .

ad 2) Ve druhém případě se odvodí, že $\forall \varepsilon > 0 \exists U(x_0)$ tak, že $\forall x \in U(x_0)$ platí (t je mezi x a x_0):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| < \\ &< \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| < \dots < \varepsilon. \end{aligned}$$



Užití Riemannova integrálu

Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

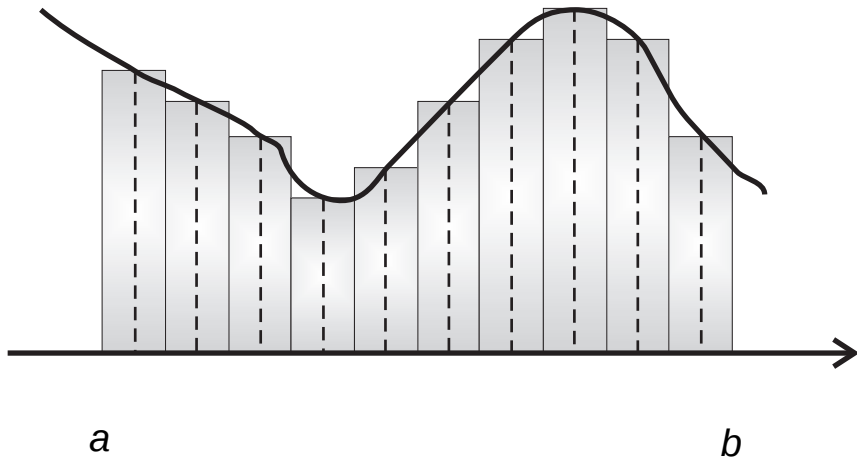
- existuje více přibližných metod,
- s využitím výpočetní techniky rozsáhlé uplatnění v aplikacích,
- primitivní funkci ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

- Předpokládáme-li

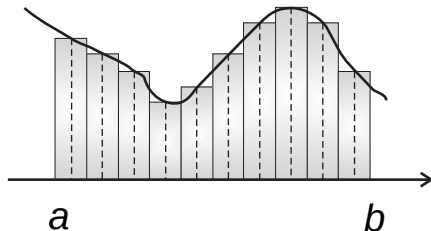
$$f(x) \geq 0 \quad \text{na} \quad \langle a, b \rangle,$$

jde při výpočtu Riemannova integrálu o **výpočet obsahu základního obrazce**.

Metoda obdélníková



Metoda obdélníková

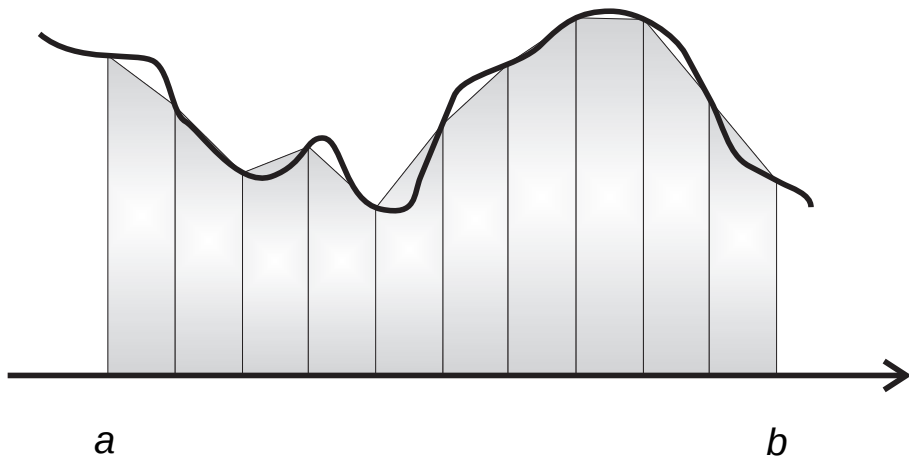


- Určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem, s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i .

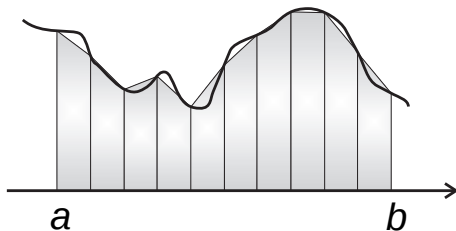
- ▶ Zpravidla dělení na n stejných elementů s krokem $h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$,
- ▶ za ξ_i volíme středy elementů.
- ▶ Obsah základního obrazce $\approx$ součet obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i).$$

Metoda lichoběžníků



Metoda lichoběžníková



- Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou.
- Obsah základního obrazce $\approx$ součet obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1}), f(x_i)$ a s výškou $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = h \left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2} \right].$$

Metoda Simpsonova

- Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $\frac{b-a}{2n}$,
- z nichž vytvoříme dvojice elementů o šířce $h = \frac{b-a}{n}$.
- V každé dvojici pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed těchto „dvojelementů“),
- k výpočtu obsahu vzniklých „křivočarých lichoběžníků“ lze využít Simpsonova vzorce.

$$P = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{2i+2} - x_{2i}) \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right].$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left\{ [f(x_0) + f(x_{2n})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})] + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})] \right\}.$$

Užití určitého integrálu v geometrii

Obsah rovinného obrazce

- Uvažujme dále jen spojité funkce.
- Z geometrického významu Riemannova integrálu plyne, že pro funkci $f(x) \geq 0$ definovanou na $\langle a, b \rangle$ je obsah křivočarého lichoběžníku (základního obrazce) roven

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

- Pozor! Je-li $f(x) < 0$ (tato část grafu funkce je pod osou x), dostaneme obsah se záporným znaménkem.
- Pokud bychom použili předchozí vzorec na funkci, která na $\langle a, b \rangle$ střídá znaménka, dostaneme rozdíl obsahů částí základního obrazce nad osou x a pod osou x , tedy výsledek, který nás zpravidla nezajímá: $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$)

Obsah rovinného obrazce

- Platí-li na intervalu $\langle a, b \rangle$ vztah

$$0 \leq g(x) \leq f(x),$$

je přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy obou funkcí ohraničena oblast
normální vzhledem k x

- její obsah:

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

- Je-li rovinný obrazec ohraničen křivkou danou **parametricky**

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

pak

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right|.$$

Obsah rovinného obrazce

Obsah obrazce ohraničeného křivkami v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$ od φ_1 do φ_2 je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi.$$

K tomuto vzorci dojdeme využitím vztahu

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho(\varphi) \rho(\varphi + \Delta\varphi) \Delta\varphi.$$

Úloha

Vypočtete obsah kruhu o poloměru r .

Řešení.

a) Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ vyjádříme polokružnice:

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \dots$$

b) Parametricky: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a odsud

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right| = \left| - \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t dt \right| = \dots$$

c) Polárně: $\rho = r$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Proto

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \dots = \pi r^2.$$