

Riemannův určitý integrál – 3

Jiří Fišer

KMA, PŘF UP Olomouc

LS10

Objem tělesa

a) **Těleso** leží **mezi rovinami** $x = a$ a $x = b$

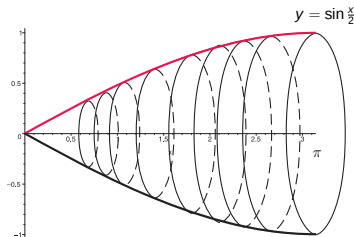
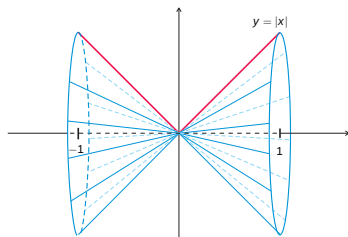
$P(x)$ — obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x .

Element objemu:

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad dV = P(x) \cdot dx.$$

Objem tělesa:
$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

Objem tělesa



b) Rotační těleso:

- osou rotace je osa x ,
- vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Řezem je kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$.

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Úloha

Určete objem koule o poloměru r .

Řešení.

Koule vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x a proto

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



Délka křivky

Nechť je křivka I dána parametricky:

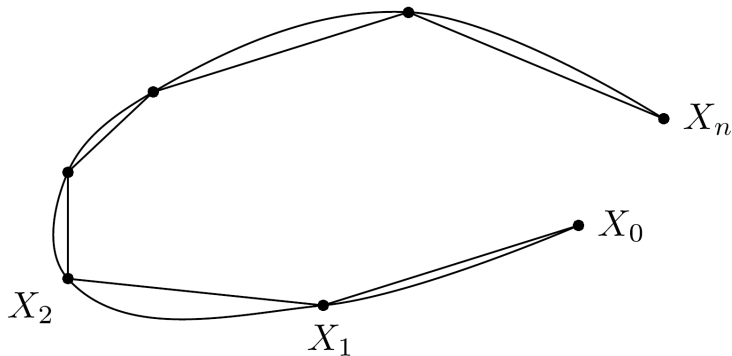
$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\y &= \psi(t), \\z &= \chi(t),\end{aligned}\quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

kde $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ jsou spojité a $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0.$$

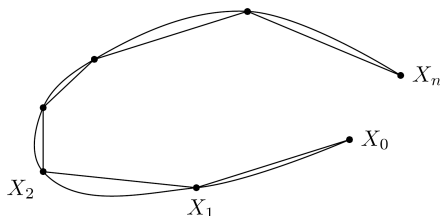
Křivka I je prostorová nebo rovinná (to když je některá z funkcí φ , ψ , χ konstantní).

Délka křivky



Délka křivky

- Dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$.
- Dělicí body: $X_i = [\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i)]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$
- Délka lomené čáry $X_0 X_1 \dots X_n$: $\sigma(l, D) = \sum_{i=1}^n |X_{i-1} X_i|$.



- Délka křivky l : $s(l) = \sup_D \sigma(l, D)$.

Délka křivky

- Uvažujme dále rovinnou křivku.
- Délka jedné strany lomené čáry je

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t,$$

takže

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

Délka křivky

Pro $\Delta t \rightarrow 0$ pak máme

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2},$$

tedy

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

$$\sigma(l, D) = \sum_{i=1}^n \Delta s_i \quad \Rightarrow \quad s(l) = \int_{\alpha}^{\beta} ds.$$

Odsud

$$s(l) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Úloha

Vypočtete délku kružnice o poloměru r .

Řešení.

Kružnici vyjádříme v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Vypočteme

$$ds = \dots = r \, dt, \quad \text{takže} \quad s(I) = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$



Délka křivky

- Křivka dána explicitně rovnicí $y = f(x)$ ($x = x, y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$):

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dt, \quad \text{takže} \quad s(l) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dt.$$

- Křivka dána v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, platí $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, odkud

$$dx = (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\varphi, \quad dy = (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) d\varphi,$$

takže

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

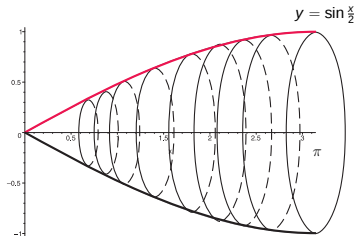
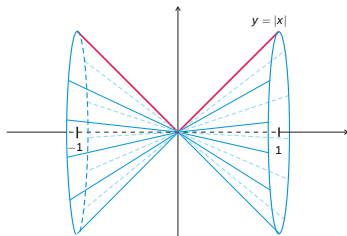
$$s(l) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Délka křivky

Pro prostorovou křivku zadanou parametricky máme

$$s(l) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

Povrch rotační plochy



- Jde o plochy vzniklé rotací křivky l kolem osy x .
- Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s.$$

- Diferenciál povrchu plochy:

$$dS = 2\pi y ds.$$

Povrch rotační plochy

- Křivka / dána parametricky:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,\end{aligned}$$

je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

- Křivka / dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

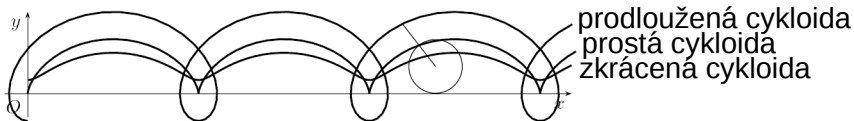
Technické křivky

- Uvádíme příklady technických křivek, které se často vyskytují ve výpočtech s využitím integrálu.
- Kuželosečky v tomto přehledu neuvádíme.

- Při kotálení křivky h (tzv. **tvůřící křivky** nebo *hybné polodie*) **bez skluzu po** pevné křivce p (tzv. **základní křivce** nebo *pevné polodii*) **opíše každý bod roviny křivku**, kterou nazýváme *kotálnice*.
- Důležité jsou případy, kdy **hybná polodie je kružnice a pevná polodie přímka nebo kružnice**.

Cykloidy

- Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po přímce p , pak
- každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (prodlouženou, zkrácenou) cykloidu.



Prostá cykloida

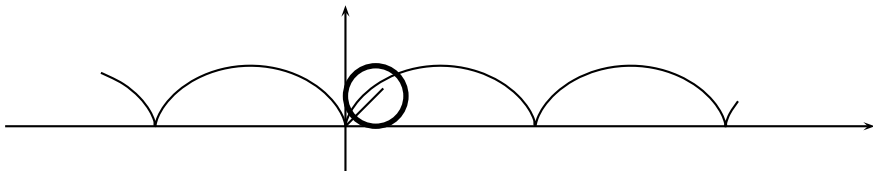
Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t);\end{aligned}$$

jednu větev dostaneme pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Platí

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$



Prodloužená (zkrácená) cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = at - r \sin t,$$

$$y = a - r \cos t.$$

Platí

$$ds = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos t} dt.$$

Epicykloidy a hypocykloidy

- Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po vnějším resp. vnitřním obvodu kružnice p o poloměru A , pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) *epicykloidu* resp. *hypocykloidu*.
- Parametrické rovnice prosté epicykloidy (platí horní znaménko) a hypocykloidy (platí dolní znaménko):

$$x = (A \pm a) \cos t \mp a \cos \frac{A \pm a}{a} t,$$

$$y = (A \pm a) \sin t - a \sin \frac{A \pm a}{a} t.$$

Asteroida

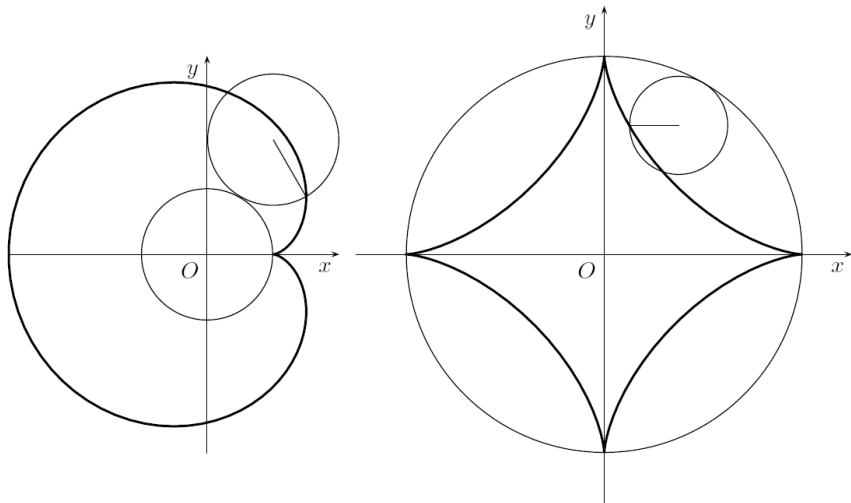
- Zvaná též *astroida* patří mezi kotálnice;
- asteroidu opisuje každý bod kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, která se bez smyku kotálí zevnitř po kružnici o poloměru a .
- Je to tedy prostá hypocykloida, kde $A = \frac{a}{4}$.
- Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned}x &= a \cos^3 t, \\y &= a \sin^3 t,\end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

- Platí

$$ds = 3a \sin t \cos t \, dt.$$

Kardioida a asteroida



Kardioida

- Patří mezi kotálnice;
- kardioidu opisuje každý bod kružnice o poloměru a , která se bez smyku kotálí vně po kružnici o poloměru a .
- Je to tedy prostá epicykloida, kde $A = a$.
- Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

- Platí

$$ds = 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Evolventa kružnice

Lze ji zařadit mezi kotálnice (kde h je přímka a p je kružnice) i mezi spirály. Jako každá evolventa křivky vznikne tak, že počínaje počátečním bodem nanášíme na tečnu délku oblouku mezi počátečním bodem a bodem dotyku tečny s křivkou. (Evolventu kružnice tedy vytváří konec napjaté niti odmotávané z kruhové cívky.)
Parametrické rovnice:

$$x = a(t \sin t + \cos t),$$

$$y = a(\sin t - t \cos t).$$

Platí

$$ds = at \, dt.$$

Archimédova spirála

Je to spirála s konstantní šířkou jednotlivých závitů. Je vytvořena rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se rovnoměrně otáčí kolem pólu.

Rovnice v polární soustavě:

$$r = a\varphi.$$

Platí

$$ds = a\sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi.$$

Logaritmická spirála

Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a e^{m\varphi}.$$

Vyskytuje se např. v kresbě ulit plžů.

Platí

$$ds = a\sqrt{1 + m^2} e^{m\varphi} d\varphi.$$

Šroubovice

Je to příklad prostorové křivky. Šroubovice leží na válcové ploše

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Rozvinutím válcové plochy přejde každý závit šroubovice v úsečku.
Parametrické rovnice:

$$x = a \cos t,$$

$$y = a \sin t, \quad \text{jeden závit pro } t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

$$z = ct,$$

Platí

$$ds = \sqrt{a^2 + c^2} dt.$$

Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost rovinné desky

- Mějme spojitou kladnou funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b \rangle$;
- nechť σ je plošná konstantní hustota materiálu.
- Je-li deska homogenní, tj. $\sigma = \text{konst.}$, je hmotnost této desky rovna

$$m = \sigma \int_a^b f(x) \, dx.$$

- Je-li hustota desky funkcí x , je

$$\int_a^b \sigma(x) f(x) \, dx.$$

Těžiště rovinné desky

- Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku $\Delta x (= dx)$.
- Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x :

$$dM_x = (y \, dx) \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}y$$

(hmotnost elementu násobená ramenem síly),

- Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose y :

$$dM_y = (y \, dx) \cdot \sigma \cdot x.$$

- Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b y^2 \, dx, \quad M_y = \sigma \int_a^b xy \, dx.$$

Těžiště rovinné desky

- Těžiště $T[\xi, \eta]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky.
- Proto

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x$$

a z toho (po zkrácení σ)

$$\xi = \frac{\int_a^b xy \, dx}{\int_a^b y \, dx}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx}.$$

Těžiště rovinné desky

- Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x , tj. je-li

$$a \leq x \leq b, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

- pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště;
- dostaneme je z předchozích záměnou $y_2 - y_1$ za y (ve jmenovatelích obou zlomků a v čitateli prvního zlomku) a $y_2^2 - y_1^2$ za y^2 (v čitateli druhého zlomku).

Hmotnost křivky

Uvažujme rovinnou homogenní křivku danou parametricky s konstantní délkovou hustotou σ . Pak

$$m = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Těžiště křivky

Při odvození vzorců se postupuje podobně jako u těžiště rovinné desky. Je zde

$$dM_x = \sigma y \, ds, \quad dM_y = \sigma x \, ds,$$

tedy

$$M_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, dt,$$

$$M_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, dt.$$

Těžiště křivky

Z rovností

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x$$

pak plyne, že rovinná homogenní křivka zadaná parametricky má těžiště $T[\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}, \quad \eta = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt}.$$

Vidíme, že těžiště homogenní rovinné desky ani těžiště homogenní křivky nezávisí na hustotě.