

1 Otázky z teorie

1. Pojednejte o supremu a infimu. Př.:

$$M_1 = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{7}{2}, \dots \right\}$$

2. Pojednejte o vlastnostech číselných posloupností. Př.:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}, \quad \{(-1)^{n-1}\}, \quad \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \right\}, \quad \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}$$

3. Pojednejte o limitě číselné posloupnosti. Př.:

$$\left\{ \sqrt[n]{0,6} \right\}, \quad \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right\}, \quad \left\{ -\frac{n}{100} \right\}, \quad \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\}, \quad \left\{ \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n\sqrt{n}} \right\}, \quad \left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} \right\}$$

4. Pojednejte o čísle e: jak je definováno, jak je lze vypočítat, jak se využije pro definici ln a hyperbolických funkcí [otázka nezahrnuje odvození e]. Př.:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n$$

5. Pojednejte o funkcích a jejich základních vlastnostech. Př.:

$$y = x^3, \quad y = \frac{6}{x}, \quad y = x - [x] \quad (\text{kde } [x] \text{ je funkce „celá část“})$$

6. Pojednejte o tom, jak se definuje pojem limita funkce. Uveďte typ příkladů na použití Heineho definice a na použití Cauchyho definice.

7. Pojednejte o vlastnostech limit funkcí. Př.:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x + \sin 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos x^2$$

8. Pojednejte o spojitosti a nespojitosti funkcí. Př. v bodě $x_0 = 0$ funkce:

$$y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \operatorname{sgn} x, \quad y = \frac{|x|}{x}, \quad y = x \cdot |x|$$

9. Pojednejte o funkcích spojitých na intervalu. Př. Na kterých intervalech jsou spojitě funkce:

$$y = \frac{6}{x}, \quad y = \frac{1}{\sin x}, \quad y = [x] \quad (\text{kde } [x] \text{ je funkce „celá část“})$$

10. Pojednejte o derivaci funkce. Př.:

$$y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad y = x \cdot |x|, \quad y = |x|$$

11. Pojednejte o derivacích vyšších řádů a způsobu jejich výpočtu. Př. Vypočtete 12. derivaci funkcí:

$$y = \sin x, \quad y = x^{11}, \quad y = x^{13}, \quad y = x^2 \cdot e^{-2x}$$

12. Pojednejte o diferenciálu funkce, jeho vlastnostech a užití. Př. Určete dy , d^2y pro $y = \sin^2 \pi x$, $y = \cos^2 \pi x$, kde $x = \frac{1}{t}$.

13. Pojednejte o větách o střední hodnotě diferenciálního počtu a jejich užití. Př. Určete ξ v Lagrangeově větě pro funkci $y = x^3 - 3x$ na intervalu $\langle 1, 7 \rangle$.

14. Pojednejte o vztahu derivace a vlastností funkcí (monotonnost, konvexnost, konkávnost). Př. $y = 6 - x^3$.

15. Pojednejte o lokálních extrémech a o globálních extrémech. Př. $y = x^2 \cdot e^{-x}$ (lokální), $y = x^2 \cdot e^{-x}$ na $\langle -1, 1 \rangle$ (globální).

16. Pojednejte o vyšetřování průběhu funkce. Př. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

17. Pojednejte o primitivních funkcích a integračních metodách: substituce, per partes, integrace racionálních funkcí. Př.:

$$\int x \sin x \, dx, \quad \int \frac{\sin \ln x}{x} \, dx, \quad \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} \, dx$$

18. Pojednejte o primitivních funkcích a integračních metodách: integrace iracionálních funkcí, goniometrických funkcí. Př.:

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx, \quad \int \sin x \cos 3x \, dx$$

19. Pojednejte o Riemannově určitém integrálu (definice užitím integrálních součtů) a jeho základních vlastnostech. Př.:

$$y = 3 - 2x, \quad y = \chi(x) \text{ (Dirichletova funkce) na } \langle 0, 1 \rangle$$

20. Pojednejte o horním a dolním Riemannově integrálu. Př.:

$$y = x^2, \quad y = \chi(x) \text{ (Dirichletova funkce) na } \langle 0, 1 \rangle$$

21. Pojednejte o vlastnostech funkcí integrace schopných a o vlastnostech Riemannova integrálu. Př.:

$$\int_1^4 \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx, \quad \int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

22. Pojednejte o přibližných metodách výpočtu určitého integrálu. Př.:

$$y = x \cdot (4 - x) \quad \text{na } \langle 0, 4 \rangle$$

23. Pojednejte o užití určitého integrálu v geometrii. Uvádějte příklady.

24. Pojednejte o užití určitého integrálu ve fyzice. Uvádějte příklady.

25. Pojednejte o nevlastních integrálech vlivem meze. Př.:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$$

26. Pojednejte o nevlastních integrálech vlivem funkce. Př.:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

27. Pojednejte o základních pojmech diferenciálních rovnic. Př.:

$$y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

28. Pojednejte o základních metodách řešení diferenciálních rovnic 1. řádu. Př.:

$$y' = (t + y)^2$$

29. Pojednejte o číselných řadách a jejich základních vlastnostech. Př.:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

30. Pojednejte o kritériích konvergence číselných řad s nezápornými členy. Př.:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots, \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \dots$$

31. Pojednejte o řadách s libovolnými členy a o absolutní a neabsolutní konvergenci. Př.:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots, \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

32. Pojednejte o operacích s číselnými řadami. (Zejména přerovnávání řad a násobení řad.) Př.:

$$(1 + 1) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

2 Důkazy

1. Dokažte věty o střední hodnotě Lagrangeovu a Cauchyovu.
2. Dokažte věty Fermatovu a Rolleovu.
3. Dokažte Leibnitzovo kritérium pro alternující řady.
4. Dokažte větu o přerovnávání řad absolutně konvergentních.
5. Dokažte Riemannovu větu o přerovnávání neabsolutně konvergentních řad.
6. Vysvětlete princip důkazu integrálního kritéria konvergence řad.
7. Dokažte kritéria konvergence řad s nezápornými členy: podílové a odmocninové (i limitní).
8. Dokažte věty Weierstrassovy.
9. Dokažte větu Bolzano–Cauchyovu a větu o mezhodnotě. použití.
10. Dokažte věty o limitách posloupností: existence nejvýše jedné limity, omezenost konvergentní posloupnosti, konvergence omezené monotónní posloupnosti, limita součtu.
11. Dokažte větu o vložených intervalech.
12. Dokažte větu Bolzano–Weierstrassovu.
13. Dokažte větu o vztahu monotonnosti funkce v bodě a na intervalu.
14. Dokažte věty o vztahu monotonnosti funkce a derivace funkce.
15. Dokažte větu o výpočtu asymptot.
16. Odvoďte metodu separace proměnných.
17. Dokažte věty o střední hodnotě integrálního počtu.
18. Dokažte Newtonův vzorec.
19. Dokažte věty o substituci a větu o per partes.
20. Odvoďte vzorce pro integrály I_c , I_s .
21. Odvoďte rekurentní vzorec pro integrál $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$.
22. Dokažte větu o přerovnávání řad s nezápornými členy.
23. Dokažte srovnávací kritéria konvergence řad s nezápornými členy.

3 Příklady 1

1. Rozhodněte o konvexnosti, konkávnosti a inflexi funkce $y = e^{\arctg x}$.
2. Určete supremum, infimum a hromadné body množiny M všech součtů $1 + 2 \cdot \frac{p}{q}$, kde $p < q$ jsou kladná přirozená čísla.
3. Užitím derivací dokažte, že hyperboly $xy = 8$, $x^2 - y^2 = 12$ se protínají pod pravým úhlem.
4. Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}$.
5. Vypočtěte $y^{(7)}$ pro funkci $y = x^3 \cdot \sin 2x$.
6. Pomocí násobení geometrických řad nalezněte řadu se součtem $\frac{1}{1 - 5x + 6x^2}$.
7. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x}$.
8. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n^2 - 1)(2n + 3)^2}{(5n - 1)^2(12n^2 - 5)}$.
9. Určete body nespojitosti a určete druh nespojitosti pro funkce $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $y = \lfloor x \rfloor$ („celá část“), $y = \frac{1}{x^2}$.
10. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{2n}{2}}{\sqrt{9n^4 + n}}$.
11. Určete extrém funkce dané rovnicí $x^2 + 3xy + y^2 + 4 = 0$.
12. Určete funkci inverzní k funkci $y = \frac{2x-1}{3x+1}$.
13. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^n}{n!} + \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{0,2} + \sqrt[n]{n}} \right]$.
14. Určete derivaci $\frac{dy}{dx}$ funkce f dané parametricky $f: \begin{cases} x = t + \cos^2 t \\ y = t + \sin^2 t \end{cases}$.
15. Určete definiční obor a derivaci funkce $y = \arcsin \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$.
16. Vypočtěte těžiště jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
17. Určete asymptoty grafu funkce $y = 2x + \frac{\sin x}{x^2}$.
18. Najděte intervaly monotonnosti funkce $y = x \cdot e^{(1-x)/2}$.

19. Určete extrém funkce f , která je dána parametricky $f: \begin{cases} x = 3 \ln t \\ y = t^3 - 3 \ln t \end{cases}$.
20. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^x$.
21. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 3^{\ln x^2} - 3^{1+\ln x} + 1}{6 \cdot 3^{\ln x} + 3^{\ln x} + 2}$. [Užijte substituci $3^{\ln x} = z$.]
22. Určete definiční obor a funkční obor funkce $y = \arcsin \frac{2x-5}{3}$. Najděte funkci inverzní.
23. Určete extrémy funkce f dané parametricky $f: \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 - 27t \end{cases}$.
24. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
25. Užitím integrálu vypočtěte délku kružnice. Zadání kružnice uvažujte implicitní, parametrické i v polárních souřadnicích.
26. Určete střední hodnotu integrálu $\int_0^4 \ln(x+4) dx$.
27. Užitím Eulerových vzorců vypočtěte $\int \cos^4 x dx$.
28. Najděte globální extrémy funkce $y = x^3 - 12x$ na intervalu $\langle -1, 3 \rangle$.
29. Rozhodněte o konvexnosti, konkávnosti a inflexi pro funkci $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 2x + 1$.
30. Funkci $y = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$ vyjádřete Maclaurinovým vzorcem.
31. Určete lokální extrémy funkce $y = (2x - 3)^6$.
32. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+2} + 3 \cdot 2^n + 5}{2^{n+1} + 5 \cdot 2^n + 9}$.

4 Příklady 2

1. Dokažte konvergenci řady $\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. Ukažte použití kriterií srovnávacího, Raabeova, integrálního.
2. Rozhodněte o konvergenci, případně určete součet řady $\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \dots$.
3. Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.
4. Užitím násobení řad určete řadu, jejíž součet je $\frac{1}{(1+2x)^2}$.
5. Vypočtěte a, b , kde $a = 0,7 \cdot (+\infty) + (-\infty)^2 - \frac{5}{-\infty}$, $b = \frac{+\infty}{2} - \frac{+\infty}{3}$. Které výrazy nejsou v $\mathbb{R}^*$ definovány?
6. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n - 1} - \frac{2n^2 + 3}{n + 1} \right)$.
7. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a + 6}{2n^a + 3}$, kde $a \in \mathbb{R}$. [Pozor na podmínky pro a .]
8. Určete paritu, periodičnost a omezenost pro funkce:

$$y_1 = \sin^2 x, \quad y_2 = \sin x^2, \quad y_3 = x \cdot \sin x$$

9. Užitím Raabeova kriteria rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{n(n+3)}$.
10. Vypočtěte $\int \frac{4x+1}{x^2+4} dx$ a o správnosti výpočtu se přesvědčte derivováním.
11. Řešte rovnici $y' - 2ty = \frac{t}{\sqrt{y}}$.
12. Řešte rovnici $y' + \frac{2}{t}y = e^{-3t}$.
13. Určete, zda řada $\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \dots$ konverguje, případně absolutně konverguje.
14. Pro která x konverguje řada $\frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}x^n}{n^2-1} + \dots$?
15. Rozhodněte o konvergenci řady $e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x} + \dots$ [ověřte, zda je to geometrická řada]
16. Užitím Raabeova kriteria zjistěte, pro která $a > 0$ konverguje nebo diverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)}$.
17. Určete Maclaurinův rozvoj funkce $y = \ln(1+x)$.

18. Rozhodněte o konvergenci řady $\frac{10}{2!} + \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{4!} + \dots$.
19. Rozhodněte o monotonnosti, extrémech a paritě funkce $y = |x| \cdot (4 - x)$.
20. Pro která x konverguje řada $\frac{1}{3}x + \left(\frac{2}{5}\right)^2 x^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 x^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 x^4 + \dots$?
21. Pro která x konverguje řada $\sum \frac{1}{(x-2)^n}$?
22. Užitím 1. srovnávacího kritéria dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ je absolutně konvergentní.
23. Užitím integrálu vypočtěte povrch koule o poloměru r .
24. Užitím integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots$.
25. Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci řady $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$.
26. Kterými metodami lze vypočítat $\int \sqrt{x^2 - 10x + 9} dx$?
27. K dané soustavě čar určete ortogonální trajektorie $y = p \cdot x$.
28. Užitím vhodného srovnávacího kritéria rozhodněte o chování řady $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+9}}$.
29. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolami $x = y^2$, $y = x^2$.
30. Užitím integrálu vypočtěte obsah kruhu o poloměru r .
31. Vypočtěte délku jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
32. Vypočtěte $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx$.