# KMA/M3 Matematika 3

Jiří Fišer

15. září 2011



## Obsah

# Seznam obrázků

# KMA/M3: Přednáška č. 1

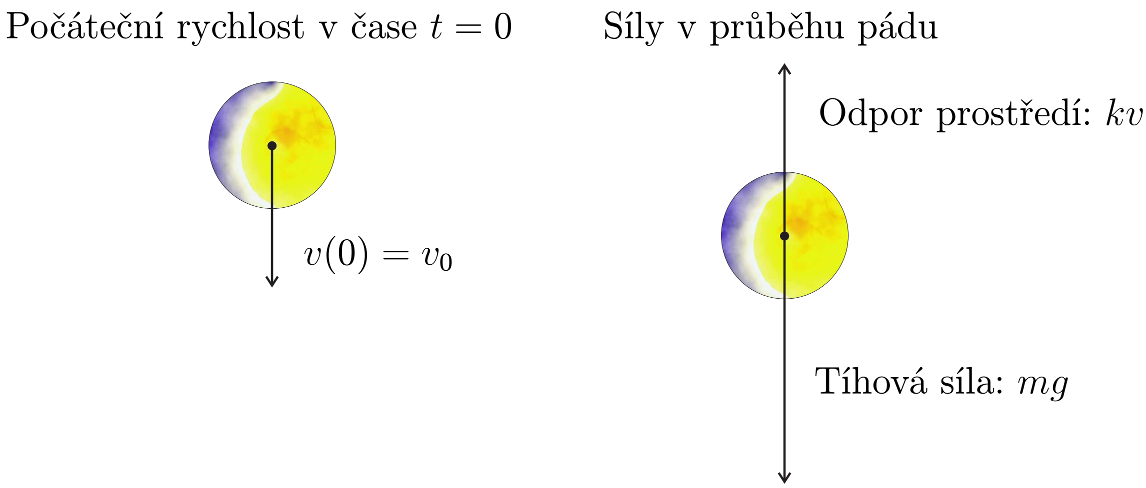
# Obyčejné diferenciální rovnice

## 1 Úvod

Než si přesně nadefinujeme, co to vlastně obyčejné diferenciální rovnice jsou, uvedeme si následující ilustrativní příklad možného využití těchto rovnic.

**Úloha 1** (Vrh tělesem svisle dolů)**.** *Těleso o hmotnosti $m$ vrhneme svisle dolů s počáteční rychlostí $v_0$. Jak se mění jeho rychlost $v = v(t)$ v následujícím čase $t \geq 0$, jestliže počítáme s odporem vzduchu s koeficientem $k$?*

*Řešení.* Na padající těleso působí zemská tíže (urychluje pád) a současně odpor vzduchu (zpomaluje pád). Zatímco zemskou tíži považujeme za konstantní ($mg$), tak odpor vzduchu závisí přímo úměrně na aktuální rychlosti ($kv$). Jiné síly působící na těleso neuvažujeme.




Obrázek 1: Grafické znázornění situace padajícího tělesa.

Pokud na těleso působí nějaká nenulová síla, uděluje mu zrychlení. Závislost této síly $F$, hmotnosti tělesa $m$ a jeho zrychlení $a$ popisuje druhý Newtonův zákon:

$$m \cdot a = F.$$

Hmotnost tělesa $m$ je dána, zrychlení $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ vyjádříme jako derivaci aktuální rychlosti a $F = mg - kv$ jako rozdíl mezi pro a proti síly. Po dosazení do rovnice druhého Newtonova zákona:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv. \tag{1}$$

V této rovnici se vyskytuje derivace neznámé (hledané) funkce $v = v(t)$ a je to příklad lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnice tohoto typu se v průběhu semestru naučíme řešit. Aktuálně si toto řešení uvedeme:

$$v = v(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad c \in \mathbb{R},\ t \in \langle 0; +\infty) \,. \tag{2}$$

Zkusme tuto skutečnost ověřit. Abychom mohli dosadit řešení (2) do rovnice (1), potřebujeme vypočíst derivaci rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left[ c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right]' = -c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \,.$$

Dosadíme do levé strany a upravíme:

$$L = m \cdot \left( -c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \,.$$

Podobně pro pravou stranu dostaneme:

$$P = mg - k\left( c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \,.$$

Tedy $L = P$.

Jelikož $c \in \mathbb{R}$, existuje nekonečně mnoho řešení (funkcí), které vyhovují rovnici (1). Čím se liší? Co představují? Jak mezi nimi rozlišovat? Klíčem bude zatím nezapočítaná počáteční rychlost $v_0$. Mezi všemi možnými řešeními budeme vybírat jen ta, která splňují počáteční podmínku $v(0) = v_0$. Uvidíme, že bude právě jedno:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0, \\ c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}0} + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c &= v_0 - \frac{mg}{k}. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do (2):

$$v = v(t) = \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad t \in \langle 0; +\infty) \,. \tag{3}$$

Řešení (2) nazýváme obecné (zahrnuje všechna řešení), zatímco řešení (3) nazýváme partikulární.

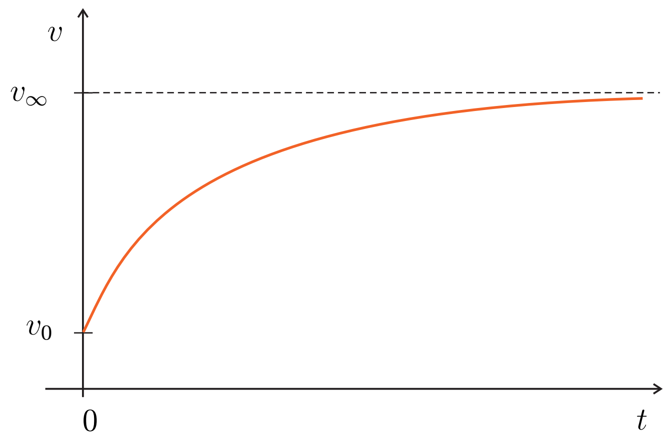
Na závěr prozkoumáme dva limitní stavy partikulárního řešení, pro $0 < k \to 0^+$ (zanedbání odporu vzduchu)

$$\lim_{0<k\to 0^+} \left[ \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

a pro $t \to +\infty$ (limitní chování řešení, tedy limitní konstantní rychlost, při které se odpor vzduchu vyrovná s tíhovým zrychlením)

$$v_\infty := \lim_{t\to+\infty} \left[ \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right] = \frac{mg}{k}.$$

□




Obrázek 2: Graf rychlosti padajícího tělesa $v = v(t)$, kde $v(0) = v_0$ značí počáteční rychlost a $v_\infty$ je rychlost limitní.

## 2 Diferenciální rovnice: základní pojmy

**Úloha 2.** *Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.*

*Řešení.* Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde $C$ je (libovolná) integrační konstanta. $\square$

**Úloha 3.** *Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.*

*Řešení.* Z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna například pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. $\square$

**Úloha 4.** *Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.*

*Řešení.* Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde $C$ je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2 + C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t + 3$ vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce. $\square$

To jsou tři příklady diferenciálních rovnic.

**Definice 2.1.** ***Diferenciální rovnice*** *je název pro rovnice, kde neznámou je funkce a v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace neznámé funkce.* ***Řád*** *diferenciální rovnice, to je řád nejvyšší derivace neznámé funkce v rovnici.*

V našich příkladech jde o rovnice 1., 2. a 1. řádu. V matematice i v aplikacích se pracuje s *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací, a také s *parciálními diferenciálními rovnicemi*, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.

**Definice 2.2.** ***Řešením (integrálem)*** *diferenciální rovnice nazýváme každou funkci, která po dosazení vyhovuje na nějakém intervalu dané diferenciální rovnici.*

Tak rovnice z příkladu 3 má řešení $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, ale též $y_3 = 5\cos t - \sin t$, $y_4 = C\sin t$ (kde $C$ je libovolná konstanta) a další.

**Definice 2.3.** ***Obecným řešením*** *diferenciální rovnice $n$-tého řádu nazýváme to řešení, v němž se vyskytuje $n$ libovolných konstant, které nelze nahradit menším počtem konstant.*

Tak třeba funkce $y = C_1C_2 \sin t$ není obecným řešením diferenciální rovnice z příkladu 3, neboť lze položit $C = C_1C_2$ a v řešení $y = C \sin t$ je už jen jedna libovolná konstanta. Uvedená rovnice má obecné řešení $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, ale také třeba $y = A\sin(t - \varphi)$, kde $A$, $\varphi$ jsou libovolné konstanty.

**Definice 2.4.** ***Partikulárním řešením*** *diferenciální rovnice nazýváme řešení, které lze dostat z obecného řešení tím, že za některé konstanty $C$ volíme přípustné číselné hodnoty.*

## Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f(t, y).$$

Řešení rovnice může mít tvar explicitní, například $y = t + C$, nebo implicitní, například $y - t = C$.

**Definice 2.5.** *Mějme diferenciální rovnici $y' = f(t, y)$ a dále nechť $t_0$, $y_0$ jsou libovolně daná reálná čísla.* ***Cauchyova počáteční úloha*** *znamená najít partikulární řešení $y(t)$ dané diferenciální rovnice, které je definována na nějakém intervalu $I$ (kde $t_0 \in I$) a splňuje podmínku*

$$y(t_0) = y_0.$$

*Tato podmínka se nazývá* ***Cauchyova počáteční podmínka****.*

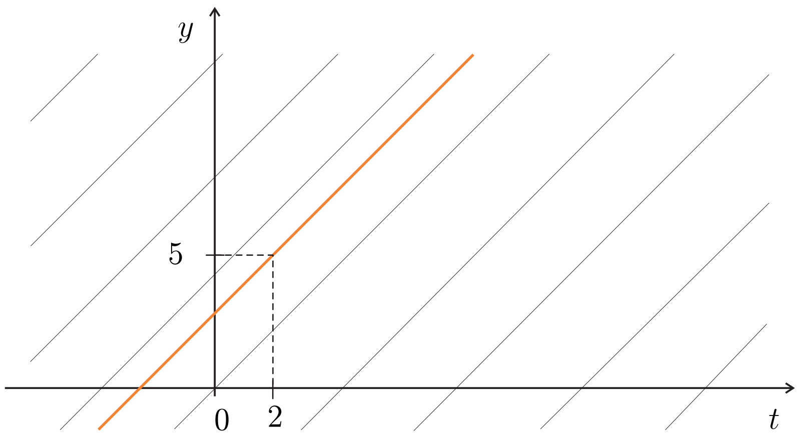
Příklad Cauchyovy úlohy je v úloze 4.

### Geometrický význam řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Na obecné řešení diferenciální rovnice prvního řádu se můžeme dívat jako na množinu funkcí s parametrem $C$, tj. jako na množinu všech partikulárních řešení. Grafem každého partikulárního řešení je nějaká křivka; nazýváme ji *integrální křivka.*

Geometrickým významem obecného řešení je tedy jednoparametrická soustava čar — integrálních křivek.

Například obecné řešení rovnice z úlohy 4 představuje (v pravoúhlém souřadnicovém systému s osami $t$, $y$) soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$. Partikulární řešení dané Cauchyovou počáteční podmínkou $y(2) = 5$ pak znamená tu přímku soustavy, která prochází bodem $[2; 5]$.




Obrázek 3: Grafické znázornění řešení (přímky $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$) rovnice $y' = 1$ z úlohy 4. Zvýrazněno je řešení $y = t + 3$ splňující počáteční podmínku $y(2) = 5$.

# Domácí cvičení

**Úloha 5.** *Zjistěte, zda funkce*

$$y = 1 + e^x + x - \frac{1}{2}x^2$$

*je řešením diferenciální rovnice*

$$y'' - y' - x = 0$$

*a na jaké množině (intervalu).*

# KMA/M3: Přednáška č. 2

## 2 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

V této kapitole se budeme zabývat obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu ve tvaru

$$y' = f(t, y), \tag{4}$$

kde $f$ je funkce dvou proměnných definovaná na $G \subset \mathbb{R}^2$.

### Cauchyova počáteční úloha

Je dána DR (4) a dvě reálná čísla $t_0$ a $y_0$, kde $(t_0, y_0) \in G$.

Máme nalézt řešení DR (4), které splňuje Cauchyovu počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

**Věta 1.** *Nechť $f(t, y)$ je spojitá na $G \subset \mathbb{R}^2$. Pak pro každý bod $(t_0, y_0) \in G$ existuje alespoň jedno řešení $h(t)$ diferenciální rovnice (4), definované na nějakém intervalu $I$ obsahujícím bod $t_0$ a splňujícím podmínku $h(t_0) = y_0$.*

*Má-li navíc $f(t, y)$ omezenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$, pak ke každému $(t_0, y_0) \in G$ existuje právě jedno řešení $h(t)$ diferenciální rovnice (4), definované v jistém nejširším intervalu $I$ obsahujícím bod $t_0$ a splňujícím podmínku $h(t_0) = y_0$.*

*Každé jiné řešení $g(t)$ splňující podmínku $g(t_0) = y_0$ je částí tohoto řešení, tzn. že pro $x \in U(t_0)$ platí g(t)=h(t).*

$$f(t, y) \text{ spojitá na } G \quad \Longrightarrow \quad \textsc{Existence}$$

$$\left.\begin{array}{c} f(t, y) \text{ spojitá na } G \\ + \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ omezená na } G \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \textsc{Jednoznačnost}$$

Obrázek 4: Schematické znázornění postačujících podmínek pro existenci jednoznačnost řešení Cauchyovy počáteční úlohy.

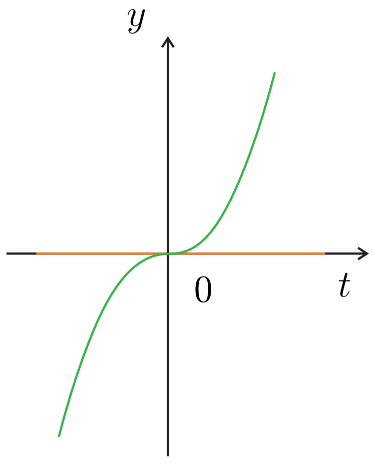
**Úloha 6** (Nejednoznačnost)**.** *Řešte* $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

*Řešení.* $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{y^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$ existence.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}} \Longrightarrow$ v okolí 0 není omezená $\Longrightarrow$ není splněna podmínka jednoznačnosti, takže ji nemáme zaručenu.

Ve skutečnosti opravdu dochází k nejednoznačnosti řešení (CPÚ): pro bod $(0, 0)$ máme jednak řešení $y \equiv 0$, ale také řešení $y = t^3$, obě řešení jsou definována na $I = (-\infty; +\infty)$.

Neexistuje okolí $U(0)$, na kterém by si byla rovna, ani jedno není částí druhého. $\square$




Obrázek 5: Grafické znázornění nejednoznačnosti řešení Cauchyovy počáteční úlohy z příkladu 6.

## Směrové pole

DR (4) dává každému bodu $(t, y) \in G$ právě jednu hodnotu $y'$, kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $(t, y)$. Krátkou úsečku se středem v $(t, y)$ a ležící na této přímce nazveme *lineární element*.

Množina všech lineárních elementů tvoří *směrové pole* dané DR.

Grafy řešení $y = h(t)$ DR (4) mají tu vlastnost, že jejich tečna v každém bodě $(t, h(t))$ má směrnici $f(t, h(t))$, takže odsahuje příslušný lineární element. Opačně řečeno: lineární element se středem v bodě $(t, y)$ je tečný ke grafu řešení, které tímto bodem prochází.

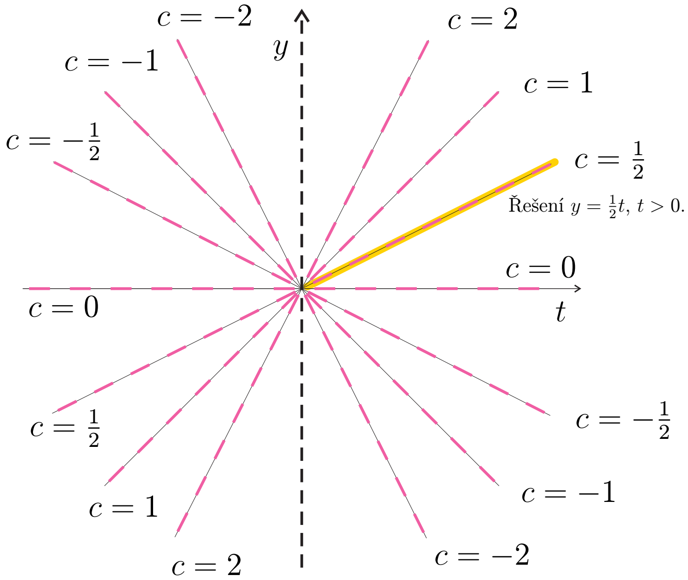
Křivky, ve kterých je $y' = f(t, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, se nazývají *izokliny*. (Lineární elementy se středy na této křivce mají všechny stejnou směrnici $c$.)

**Úloha 7** (Směrové pole)**.** *Sestrojte směrové pole DR* $y' = \dfrac{y}{t}$ *pomocí izoklin. Pokuste se načrtnout graf nějakého řešení.*

*Řešení.* Pravá strana $f(t, y) = \frac{y}{x}$ je definována pro $t \neq 0$ (tím je dáno $G$).

Izokliny: $\dfrac{y}{t} = c$, a tedy $y = ct$. Jde tedy o přímky (resp. polopřímky, neboť $t \neq 0$) se směrnicí $c$, procházející počátkem, na kterých směrnice lineárních elementů mají totožnou hodnotu $c$. To znamená, že jsou v dané polopřímce obsaženy. Současně z toho plyne, že i grafy řešení se s těmito polopřímkami shodují.

$\square$




Obrázek 6: Směrové pole z úlohy 7 sestrojené pomocí izoklin.

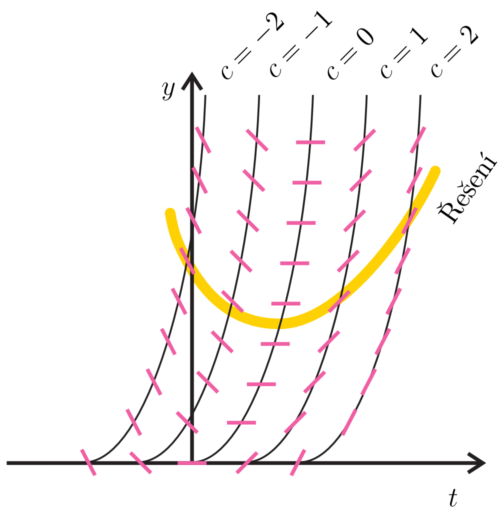
**Úloha 8** (Směrové pole)**.** *Sestrojte směrové pole DR $y' = t - \sqrt{y}$ pomocí izoklin. Pokuste se načrtnout graf nějakého řešení.*

*Řešení.* Pravá strana $f(t, y) = \frac{y}{x}$ je definována pro $y \geq 0$ (tím je dáno $G$).

Izokliny: $t - \sqrt{y} = c$, a tedy $\sqrt{y} = t - c$. Zde můžeme nahlédnout, že výraz dává smysl pro $t \geq C$, neboť levá strana ($\sqrt{y}$) je nutně nezáporná, což samozřejmě musíme požadovat i po pravé straně. Celkově tedy dostaneme:

$$y = (t - c)^2, \quad c \in \mathbb{R}, \; t \geq c.$$

Pro zvolené $c$ tedy půjde polovinu paraboly s vrcholem (počátkem) v bodě $(c, 0)$.




Obrázek 7: Směrové pole z úlohy 7 sestrojené pomocí izoklin.

□

## Domácí cvičení

**Úloha 9.** *Pro následující diferenciální rovnice sestrojte směrové pole, načrtněte izokliny a graf řešení.*

*a)* $y' = y - x^2$,

*b)* $2y' + 2y - x - 3 = 0$,

*c)* $y' = \dfrac{y}{x - y}$,

*d)* $y' = x^2 + y^2$.

# KMA/M3: Přednáška č. 3

## Základní problémy při řešení DR

V dalších paragrafech této kapitoly uvedeme určité metody řešení *vybraných typů* diferenciálních rovnic, přičemž budeme vždy předpokládat, že řešení dané diferenciální rovnice existuje. K tomu ještě praktická poznámka: Víme, že primitivní funkce k funkci spojité sice existuje, ale primitivní funkce k funkci elementární obecně už není funkce elementární. Dovedeme tedy v elementárních funkcích integrovat jen vybrané typy funkcí. Tato vlastnost se přenáší i na diferenciální rovnice, tedy i když je funkce $f(t, y)$ vyjádřena elementárními funkcemi, dovedeme řešení rovnice $y' = f(t, y)$ vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen u některých typů rovnic (algoritmy řešení pro část z nich uvádíme v dalších paragrafech).

**Chceme-li tedy úspěšně řešit takové diferenciálné rovnice, je třeba:**

- poznat, jakého typu je zadaná rovnice,
- znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,
- správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

## 3 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u rovnic, které lze převést na tvar

$$(*) \qquad \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

(separace proměnných znamená, že na jedné straně rovnice je pouze proměnná $y$, na druhé straně pouze proměnná $t$).

Je-li $y = u(t)$ nějaké řešení rovnice $(*)$ na intervalu $J$, pak pro $t \in J$ je $\mathrm{d}y = u'(t)\,\mathrm{d}t$, takže platí $\varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t)\,\mathrm{d}t$ a je to identická rovnost dvou diferenciálů na $J$, tj. $\mathrm{d}\Phi(u(t)) = \mathrm{d}\Psi(t)$, kde funkce $\Phi$, $\Psi$ jsou primitivní k funkcím $\varphi$, $\psi$ (u nichž se zřejmě předpokládá například spojitost). Proto platí $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$. Znamená to, že funkce $u(t)$ jako řešení diferenciální rovnice $(*)$ vyhovuje současně rovnici

$$(**) \qquad \Phi(y) = \Psi(t) + C.$$

Toto tvrzení platí i naopak, tedy každá funkce $y = u(t)$, která vyhovuje rovnici $(**)$, splňuje též rovnici $(*)$, jak plyne z derivace identity $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$.

**Závěr:** Funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice $(*)$ právě tehdy, když vyhovuje rovnici $(**)$; touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice $(*)$.

**Úloha 10.** *Najděte obecné řešení rovnice* $(1+t)y' = t(1-y)$.

*Řešení.* Tato rovnice je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li $y'$ jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t},$$

přičemž použitá metoda vyžaduje předpoklady $y \neq 1$, $t \neq -1$. Odsud

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde $C$ je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde $C_1$ je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že $C$ je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln|1+t| - \ln|1-y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmujeme a máme

$$\left|\frac{1+t}{1-y}\right| = C_1\,\mathrm{e}^t\,.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2\,\mathrm{e}^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3\,\mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$1-y = C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),$$
$$y = 1 - C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),$$

což je obecné řešení v explicitním tvaru (ale ještě ne definitivním).

Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y = 1$ je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do dané diferenciální rovnice:

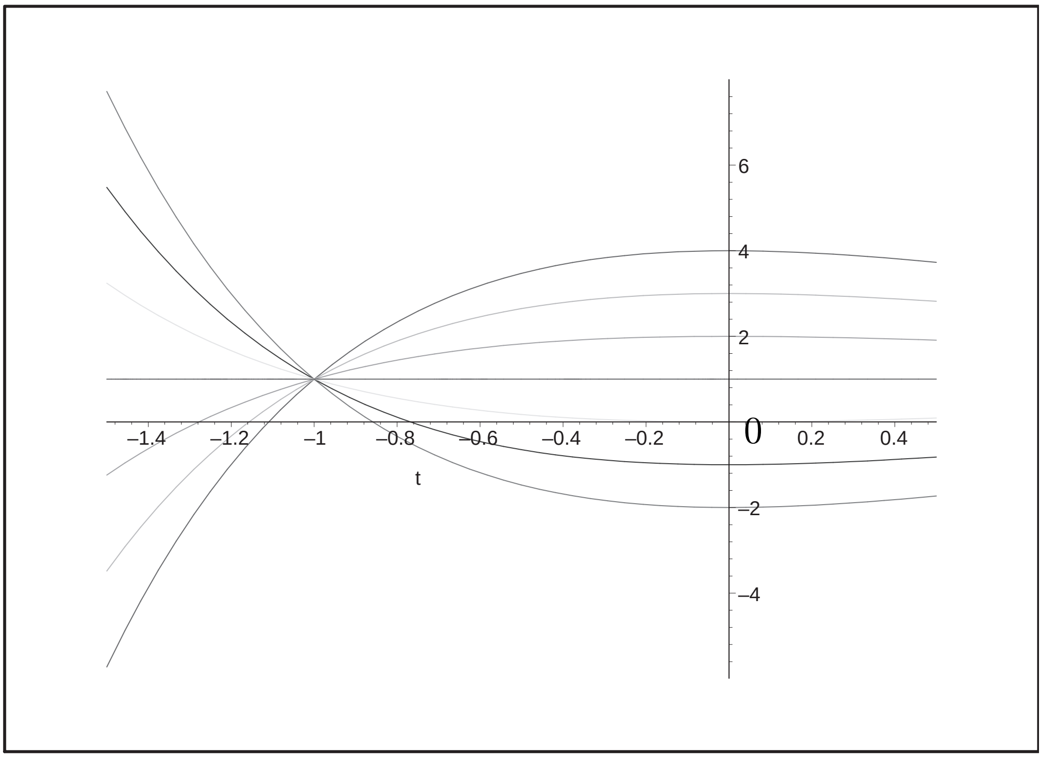
$$L = (1+t)y' = 0, \qquad P = t(1-y) = 0,$$

takže funkce $y = 1$ skutečně *je* řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu $C$. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$y = 1 + C\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),$$

kde $C = -C_3 \vee 0$.

Podívejme se ještě na podmínku $t \neq -1$. Pro $t = -1$ máme $y = 1$, tedy všechny integrální křivky procházejí bodem $[-1; 1]$. Uvědomíme si, že Cauchyova úloha $y(-1) = 1$ není řešitelná jednoznačně a například Cauchyova úloha $y(-1) = 2$ nemá řešení. □




Obrázek 8: Grafické znázornění několika řešení úlohy 10. Všechna řešení mají v čase $t = -1$ hodnotu 1 (příklad nejednoznačnosti, případně neřešitelnosti, počáteční úlohy).

**Úloha 11.** *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $yy' = \dfrac{1-2t}{y}$.

*Řešení.* Ze zadání rovnice

$$yy' = \frac{1-2t}{y}$$

můžeme vyčíst, že neznámá funkce $y$ se nikdy nesmí rovnat nule, neboť se vyskytuje ve jmenovateli. Tato skutečnost nám umožňuje vydělit celou rovnici $y$:

$$y' = \frac{1-2t}{y^2},$$

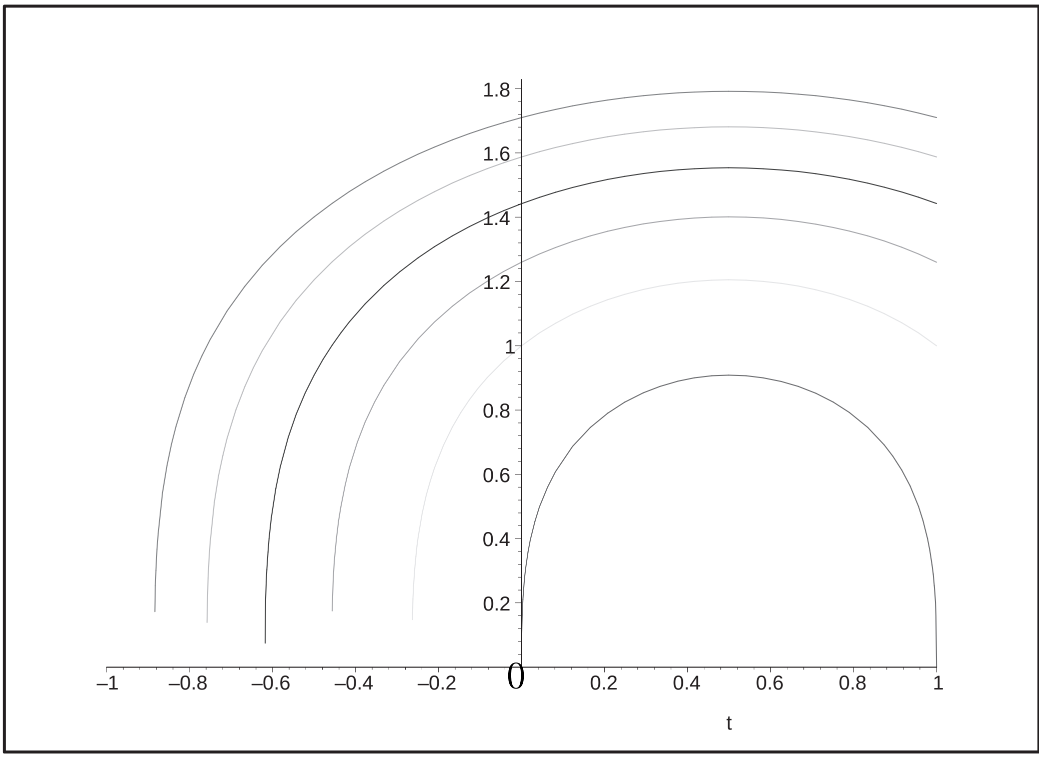
čímž jsme odhalili separabilní charakter naší rovnice. Separujme tedy:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1-2t}{y^2} \quad | \cdot y^2,\ \cdot \mathrm{d}t,\\
y^2\,\mathrm{d}y &= (1-2t)\,\mathrm{d}t,\\
\int y^2\,\mathrm{d}y &= \int (1-2t)\,\mathrm{d}t,\\
\frac{1}{3}y^3 &= t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},\\
y^3 &= 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R},\\
y &= \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$\left[ y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \right].$$

$\square$




Obrázek 9: Grafické znázornění několika řešení úlohy 11.

# Domácí cvičení

**Úloha 12.** *Znázorněte soustavu partikulárních řešení diferenciální rovnice z úlohy 10.*

**Úloha 13.** *Pomocí separace proměnných vyřešte následující DR:*

1. $y' = \dfrac{y}{x}$,
2. $y' = \dfrac{x}{y}$,
3. $y' = -\dfrac{y}{x}$,
4. $y' = -\dfrac{x}{y}$,
5. $y' = \dfrac{y-1}{x^2 y^2}$.

# KMA/M3: Přednáška č. 4

## 4 Užití substitucí

U některých typů diferenciálních rovnic lze pomocí vhodných substitucí (transformace neznámé funkce, případně i transformace nezávisle proměnné) přeměnit tyto rovnice na separovatelné.

### a) Rovnice typu $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$

Užijeme substituci $z = \alpha t + \beta y + \gamma$, odkud $z' = \alpha + \beta y'$, tj. $y' = \frac{1}{\beta}(z' - \alpha)$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z' = \alpha + \beta f(z),$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $\alpha+\beta f(z)$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se ovšem vracíme k původní proměnné.

**Příklady takových DR**

- $y' = t + y$, subst. $z = t + y$;
- $y' = (t + y + 5)^3$, subst. $z = t + y + 5$;
- $y' = \cos(2y + 5)$, subst. $z = 2y + 5$;
- $y' = \frac{2t+6y-2}{\sin(t+3y-1)}$, subst. $z = t + 3y - 1$.

**Úloha 14.** *Řešte rovnici $y' = t + y$.*

*Řešení.* Zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = t + y$, odkud $z' = 1 + y'$, tj. $y' = z' - 1$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice máme $z' - 1 = z$, neboli

$$z' = z + 1.$$

Dělením této rovnice výrazem $(z + 1)$, kde $z \neq -1$, a násobením $\mathrm{d}t$ provedeme separaci proměnných, z níž

$$z + 1 = C_1 \mathrm{e}^t,$$

neboli

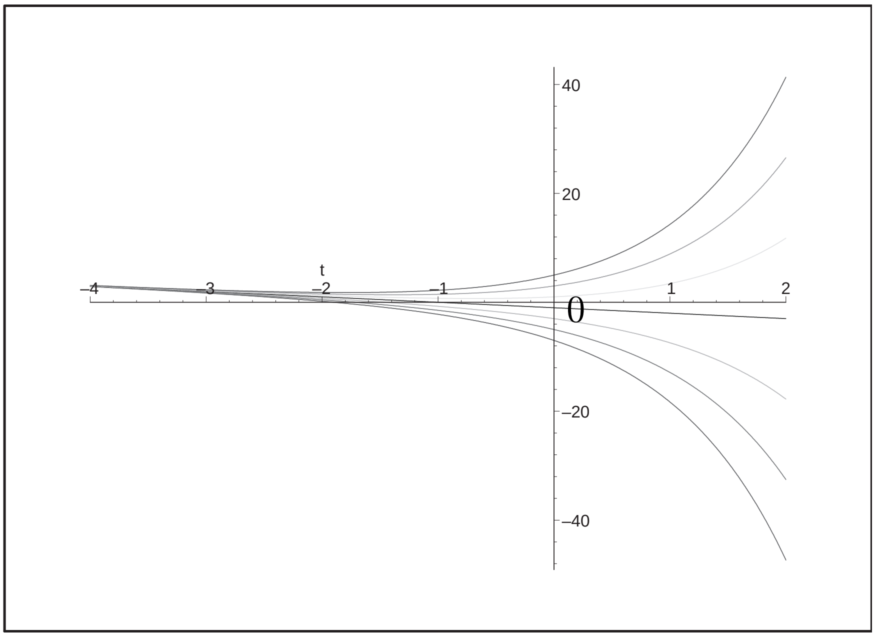
$$y = C_1 \mathrm{e}^t - 1 - t,$$

kde $C_1 \neq 0$ je libovolná konstanta. Rovnost $z = -1$ dává $y = -1 - t$, a to je funkce, která (jak zjistíme dosazením do dané diferenciální rovnice) je rovněž řešením. Obecné řešení je tedy

$$y = C \mathrm{e}^t - 1 - t,$$

kde $C$ je libovolná konstanta.

□




Obrázek 10: Grafické znázornění několika řešení úlohy 14.

**Úloha 15.** *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $y' = (4y - t)^2$.

*Řešení.* Na pravé straně rovnice nacházíme lineární výraz, tak použijeme substituci $z = 4y - t$. Ze substituční rovnice si ještě vyjádříme $y'$: $z' = 4y' - 1$, $y' = \frac{z'+1}{4}$. Dosadíme a řešíme separací proměnných:

$$\begin{aligned}
y' &= (4y-t)^2, \\
\frac{z'+1}{4} &= z^2, \\
z' &= 4z^2 - 1 \quad | \cdot \mathrm{d}t, \ : (4z^2-1) \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq \pm\frac{1}{2}, \qquad (5) \\
\frac{\mathrm{d}z}{4z^2-1} &= \mathrm{d}t, \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{4z^2-1} &= \int \mathrm{d}t, \qquad (6) \\
-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{2z+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{2z-1} &= \int \mathrm{d}t, \\
-\frac{1}{4}\ln|2z+1| + \frac{1}{4}\ln|2z-1| &= t + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \\
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2z-1}{2z+1}\right| &= t + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \\
\ln\left|\frac{2z-1}{2z+1}\right| &= 4t + \ln C_2, \quad C_2 > 0, \\
\left|\frac{2z-1}{2z+1}\right| &= C_2\,\mathrm{e}^{4t}, \quad C_2 > 0, \\
\frac{2z-1}{2z+1} &= C_3\,\mathrm{e}^{4t}, \quad C_3 = \pm C_2 \Rightarrow C_3 \neq 0. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Na levé straně (6) integrujeme racionální funkci, tedy metodou rozkladu na parciální zlomky. Na řádku (5) jsme pro další úpravy vyloučili možnosti $z = \pm\frac{1}{2}$. Nyní musíme prozkoumat, zda jsme tím nepřišli o nějaké řešení. Otestujeme dvě konstantní funkce $z_1(t) \equiv -\frac{1}{2}$ a $z_2(t) \equiv \frac{1}{2}$:

$z_1: \quad L = \left(-\frac{1}{2}\right)' = 0, \ P = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4\frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0, \ L = P.$

$z_2: \quad L = \left(\frac{1}{2}\right)' = 0, \ P = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4\frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0, \ L = P.$

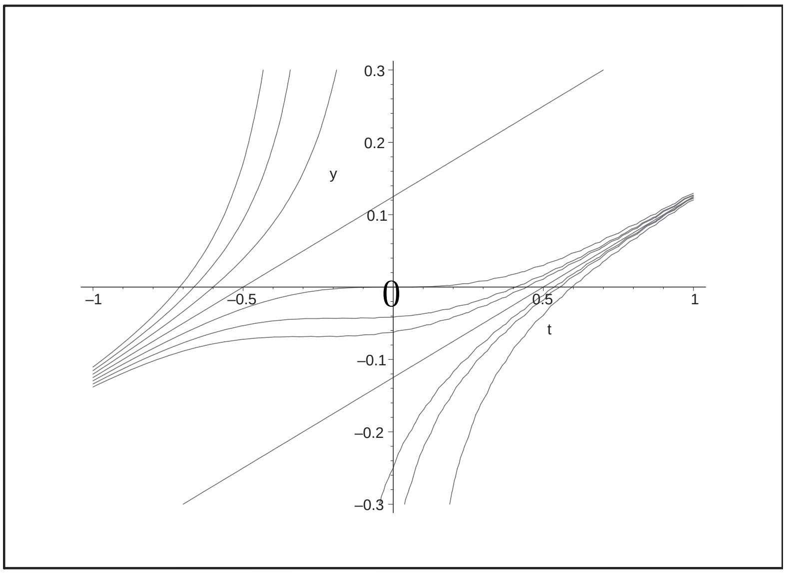
Máme tedy dvě dodatečná (konstantní) řešení. Jedno z nich, $z_2$, můžeme zakomponovat do (7), když u parametru $C_3$ povolíme nulu. $z_1$ musíme zapsat zvlášť. Celkově tedy máme:

$$\left[\frac{2z-1}{2z+1} = C\,\mathrm{e}^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad z \equiv -\frac{1}{2}\right].$$

Po návratu k původní proměnné $y$ dostaneme:

$$\left[\frac{8y-2t-1}{8y-2t+1} = C\,\mathrm{e}^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = \frac{2t-1}{8}\right].$$

$\square$




Obrázek 11: Grafické znázornění několika řešení úlohy 15. Horní přímku dostaneme pro $C = 0$ ($8y - 2t - 1 = 0$, tedy $y = \frac{2t+1}{8}$), dolní přímka pak odpovídá zvlášť zapsanému řešení $y = \frac{2t-1}{8}$.

## b) Rovnice typu $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$, tzv. homogenní rovnice

Této rovnici se říká homogenní podle toho, že funkce $F$ na pravé straně je tzv. *homogenní funkce*. Užijeme substituci $z = \dfrac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z't = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.

### Příklady takových DR

- $y' = \dfrac{2t^5 - 3y^1t^4}{-t^3y^2 + y^4t^1} \cdot \frac{\frac{1}{t^5}}{\frac{1}{t^5}}$, $\quad y' = \dfrac{2 - 3\left(\frac{y}{t}\right)}{-\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^4}$, $\quad$ subst.: $z = \dfrac{y}{t}$;
- $2tyy' = y^2 - t^2$, $\quad y' = \frac{y^2-t^2}{2ty} \cdot \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}$, $\quad y' = \dfrac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{t}\right)}$, $\quad$ subst.: $z = \dfrac{y}{t}$;
- $y^2\,\mathrm{d}t + (t^2 - ty)\,\mathrm{d}y = 0$, $\quad y' = \frac{-y^2}{t^2-ty} \cdot \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$, $\quad y' = \dfrac{-\left(\frac{y}{t}\right)^2}{1 - \left(\frac{y}{t}\right)}$, $\quad$ subst.: $z = \dfrac{y}{t}$.

**Úloha 16.** *Řešte rovnici* $2tyy' = y^2 - t^2$.

*Řešení.* Rovnici nejprve upravíme na tvar:

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}$$

a po dělení čitatele i jmenovatele výrazem $t$ dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{t}}.$$

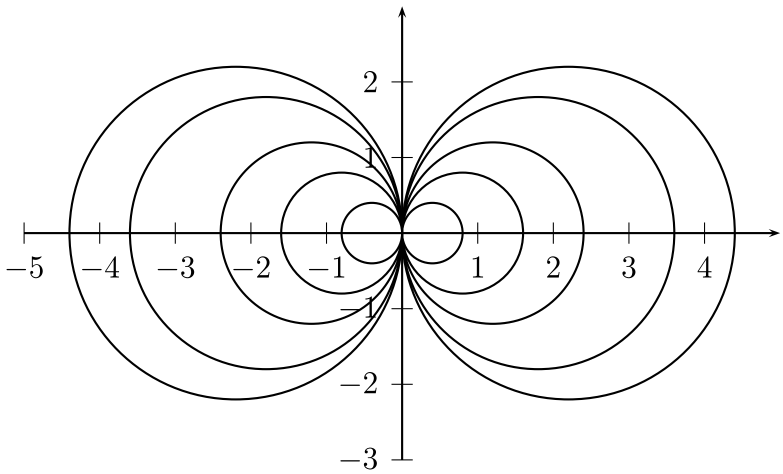
Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $z + tz' = \frac{y^2-1}{2y}$, a po separaci proměnných máme

$$\frac{2z\,\mathrm{d}z}{z^2+1} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

$$(t-C)^2 + y^2 = C^2.$$

Vidíme, že obecným řešením je jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$. □




Obrázek 12: Grafické znázornění řešení úlohy 16 — jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$, daná rovnicí $(t-C)^2 + y^2 = C^2$.

**Úloha 17.** *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $y^2\,\mathrm{d}t + (t^2 - ty)\,\mathrm{d}y = 0$.

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
y^2\,\mathrm{d}t + (t^2 - ty)\,\mathrm{d}y &= 0 \quad |: \mathrm{d}t,\ -y^2,\\
(t^2 - ty)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -y^2 \quad |: (t^2 - ty) = t(t-y) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0,\ y \neq t,\\
y' &= \frac{-y^2}{t^2 - ty} \cdot \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}},\\
y' &= \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{y}{t}\right) - 1}.
\end{aligned}$$

Poslední rovnice je již zřejmě homogenní a získali jsme ji za podmínek $t \neq 0$ a $y \neq t$. Ověříme, zda jsme nepřišli o nějaké řešení:

$y = t:\quad L = (t^2 - ty)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (t^2 - t\cdot t)(t)' = 0 \cdot 1 = 0,\quad P = -y^2 = -t^2,\quad L \neq P,$
a tak nejde o řešení.

Homogenní rovnici řešíme substitucí $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, $y' = z't + z$. Dosadíme:

$$\begin{aligned}
z't + z &= \frac{z^2}{z-1},\\
z't &= \frac{z^2}{z-1} - z,\\
z't &= \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1},\\
z't &= \frac{z}{z-1},
\end{aligned}$$

což je již separovatelná rovnice.

$$\begin{aligned}
z't &= \frac{z}{z-1} \quad |: t,\ \cdot \mathrm{d}t,\ : \frac{z}{z-1} \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0, \quad z \equiv 0 \text{ je řešení},\\
\frac{z-1}{z}\,\mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}t}{t},\\
\int \frac{z-1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t},\\
z - \ln|z| &= \ln|t| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,\\
\frac{\mathrm{e}^z}{|z|} &= C_1\,|t|\,, \quad C_1 > 0,\\
\frac{\mathrm{e}^z}{z} &= C_2 t, \quad C_2 \neq 0,\\
\mathrm{e}^z &= C_2 t z, \quad C_2 \neq 0,\\
tz &= C_3\,\mathrm{e}^z, \quad C_3 = \frac{1}{C_2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Řešení $z \equiv 0$ můžeme tímto způsobem zapsat, když povolíme $C_3 = 0$. Nakonec se vrátíme k původní proměnné, $t\frac{y}{t} = C\,\mathrm{e}^{\frac{y}{t}}$:

$$\boxed{y = C\,\mathrm{e}^{\frac{y}{t}}, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

□

## c) Rovnice typu $y' = f\left(\dfrac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Tato sekce c) je nepovinná:-).

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní. Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci $y$, tak nezávisle proměnnou $t$:

$$\begin{aligned} y &= z + r \\ t &= \tau + s. \end{aligned}$$

Koeficienty $r$, $s$ volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynulovaly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ (tedy $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\begin{aligned} \alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení $r$, $s$.

**Úloha 18.** *Řešte rovnici* $y' = \dfrac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

*Řešení.* Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 5s - 2r - 1 &= 0, \\ 2s - r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7$, $s = 3$. Substituce $y = z + 7$, $t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \qquad \text{neboli} \qquad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\dfrac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \qquad \text{odkud} \qquad u'\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2 - u}{u^2 - 4u + 5}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 4}{u^2 - 4u + 5}\mathrm{d}u = -2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - 4u + 5) = -2\ln|\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde} \quad C_1 \neq 0,$$

tedy

$$u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \dfrac{z}{\tau}$, $z = y - 7$, $\tau = t - 3$, je $u = \dfrac{y - 7}{t - 3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y - 7}{t - 3}\right)^2 - 4\frac{y - 7}{t - 3} + 5 = \frac{C}{(t - 3)^2}, \quad \text{kde} \quad C \neq 0.$$

□

## d) Snížení řádu diferenciální rovnice

Pokud v diferenciální rovnici $n$-tého řádu chybí $y$, $y'$,..., $y^{(n-2)}$, lze ji substitucí $z = y^{(n-1)}$ převést na diferenciální rovnici 1. řádu.

**Úloha 19.** *Řešte rovnici* $ty'' + (t - 1)y' = 0$.

*Řešení.* V zadané rovnici 2. řádu chybí $y$, takže položíme $y' = z$. Pak $y'' = z'$ a daná rovnice přejde na diferenciální rovnici 1. řádu

$$tz' + (t - 1)z = 0$$

(snížili jsme řád rovnice), kterou řešíme separací proměnných. Pro $z \neq 0$, $t \neq 0$ máme po separaci

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1 - t}{t}\,\mathrm{d}t$$

a po integraci

$$\ln|z| = \ln|t| - t + \ln C_1', \quad \text{kde} \quad C_1' > 0.$$

Po úpravách dostáváme obecné řešení upravené rovnice

$$z = t\,\mathrm{e}^{-t}\,C_1''$$

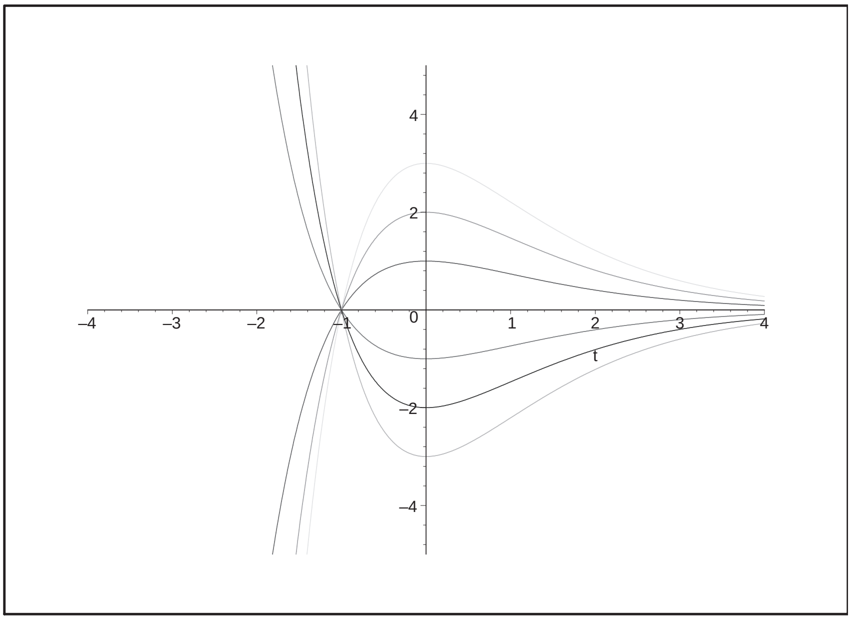
a z toho po návratu k původní proměnné

$$y' = C_1'' t\, \mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_1''$ je libovolná konstanta. Po návratu k původní proměnné $y$ máme $y' = C_1'' t\, \mathrm{e}^{-t}$, tedy $y = C_1'' \int t\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$, odkud použitím metody per partes dostaneme

$$y = C_1 (t+1)\, \mathrm{e}^{-t} + C_2,$$

kde $C_1$, $C_2$ jsou libovolné konstanty.




Obrázek 13: Grafické znázornění několika řešení úlohy 19 pro $C_2 = 0$.

□

Vidíme, že zde obecné řešení diferenciální rovnice 2. řádu skutečně závisí na dvou integračních konstantách.

**Úloha 20.** *Řešte* $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

*Řešení.* Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'' \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Separace proměnných ($z \equiv 0$ je řešením):

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln|z| = \ln|x|, \quad z = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$$

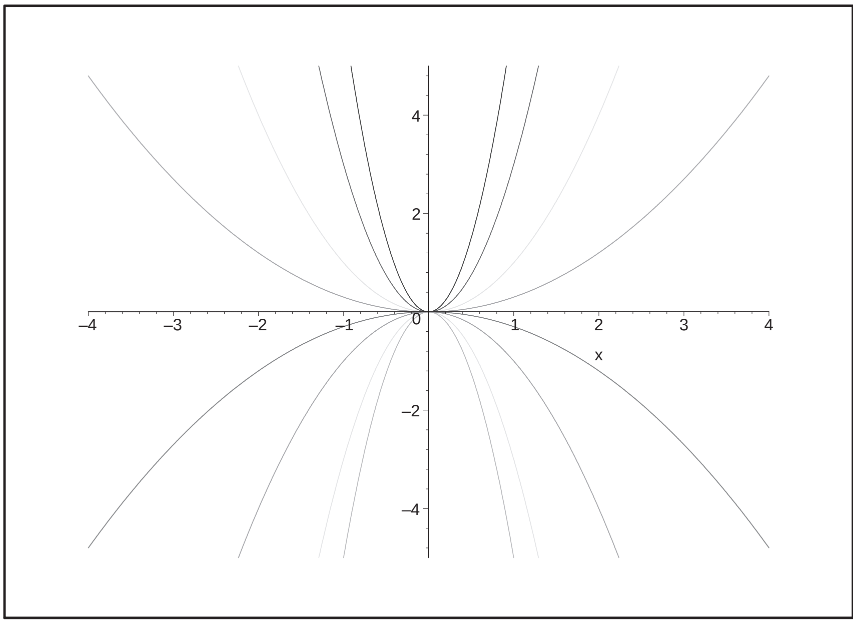
Zpětná substituce:

$$y' = Cx, \quad y = \frac{C}{2} x^2 + C_1,\ C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Řešení ($C_2 = \frac{C}{2}$):

$$y = C_1 + C_2 x^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□




Obrázek 14: Grafické znázornění několika řešení úlohy 20 pro $C_1 = 0$.

**Úloha 21.** *Řešte počáteční úlohu:*

$$y''' = \mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

*Řešení.* Substituce:

$$z = y'', \quad z' = y''', \quad z' = \mathrm{e}^{2x}, \quad z = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + C_4,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y'' = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + C_4.$$

Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'', \quad z' = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + C_4, \quad z = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C_4 x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y' = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + C_4 x + C_2, \quad y = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{C_4}{2} x^2 + C_2 x + C_3,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení ($C_1 = \frac{C_4}{2}$):

$$y = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínky:

$$y = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad y' = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + 2C_1 x + C_2, \quad y'' = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + 2C_1.$$

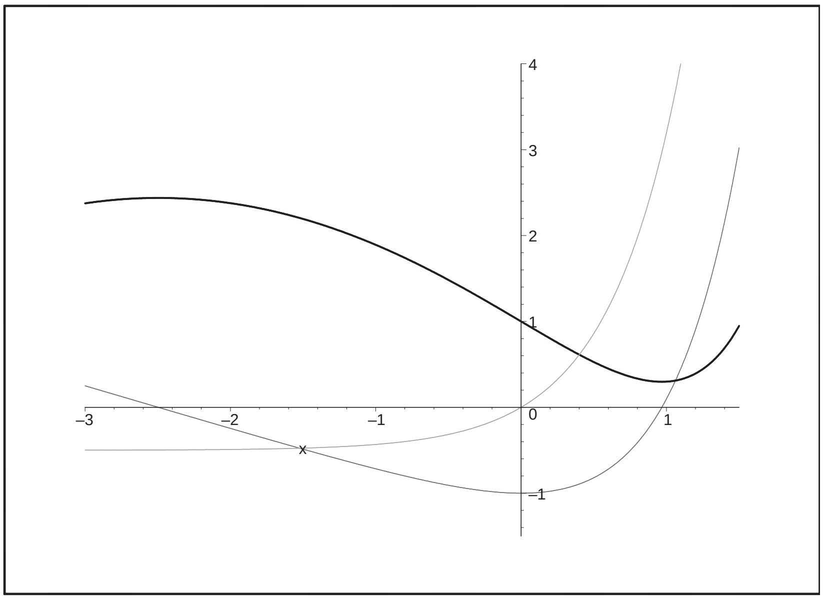
$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
y(0) & = & 1 & \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^0 + C_1 0 + C_2 0 + C_3 & = & 1 & \frac{1}{8} + C_3 & = & 1 \\
y'(0) & = & -1 & \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^0 + 2C_1 0 + C_2 & = & -1 & \frac{1}{4} + C_2 & = & -1 \\
y''(0) & = & 0 & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^0 + 2C_1 & = & 0 & \frac{1}{2} + 2C_1 & = & 0
\end{array}$$

Tudíž:

$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Partikulární řešení:

$$y = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$




Obrázek 15: Grafické znázornění partikulárního řešení úlohy 21, včetně jeho první a druhé derivace ($y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$).

$\square$

# Domácí cvičení

**Úloha 22.** *Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:*

$(t + y)\,\mathrm{d}t - (t - y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \left[\operatorname{arctg}\dfrac{y}{t} = \ln\sqrt{t^2 + y^2} + C\right].$

**Úloha 23.** *Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:*

$(t^2 + ty + y^2)\,\mathrm{d}t = t^2\,\mathrm{d}y \qquad [y = t\,\mathrm{tg}\,(\ln Ct)].$

**Úloha 24.** *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:*

*a)* $y''' = y''^3 \qquad \left[3y = (C_1 - 2t)^{\frac{3}{2}} + C_2 t + C_3\right],$

*b)* $ay''' = y''$, *kde* $a > 0 \qquad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} + C_2 t + C_3\right].$

# KMA/M3: Přednáška č. 5

## 5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

***Lineární rovnice*** je rovnice tvaru

$$(nlr) \qquad y' + p(t)y = q(t).$$

Funkce $q(t)$ se někdy nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme lineární rovnici *nehomogenní*, v opačném případě máme rovnici

$$(hlr) \qquad y' + p(t)y = 0$$

*homogenní*. Pokud v $(nlr)$ i $(hlr)$ je $p(t)$ jedna a táž funkce, nazývá se $(hlr)$ *příslušná homogenní rovnice* (tj. příslušná k dané rovnici nehomogenní).

Lineární rovnice jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles ad.) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na rovnice lineární.

Existuje několik metod, jak řešit lineární rovnice; lze je například řešit i vzorcem. Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce. Nejznámější je *metoda variace konstanty.* Tato metoda spočívá ve třech krocích:

### Metoda variace konstanty:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou $K$.

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci $K'$.

3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou $C$) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení lineární rovnice metodou variance konstanty si ukážeme na příkladě.

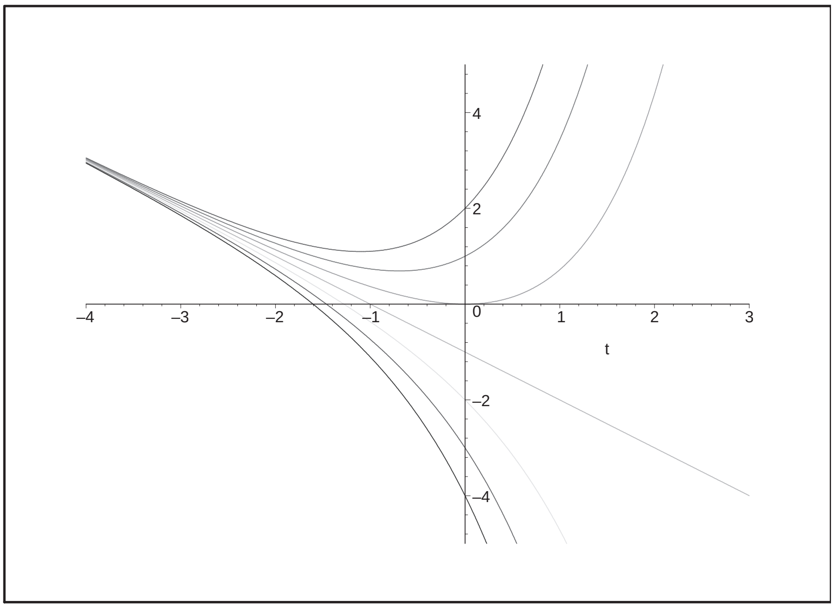
**Úloha 25.** *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' = t + y$.

*Řešení.* Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je $t$, příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot \mathrm{e}^t$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme
$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$
dva členy s $K$ se ruší (a to vždy!) a máme
$$K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}\,.$$

3. Integrujeme:
$$K = \int t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\,.$$
Toto vypočtené $K$ dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme
$$y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t\,.$$
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy
$$y = C \cdot \mathrm{e}^t - t - 1.$$




Obrázek 16: Grafické znázornění několika řešení úlohy 25.

□

**Poznámka 1.** *Pro $C = 0$ odsud dostáváme partikulární řešení $Y = -t - 1$.*

*Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní a partikulárního řešení dané rovnice nehomogennní. Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.*

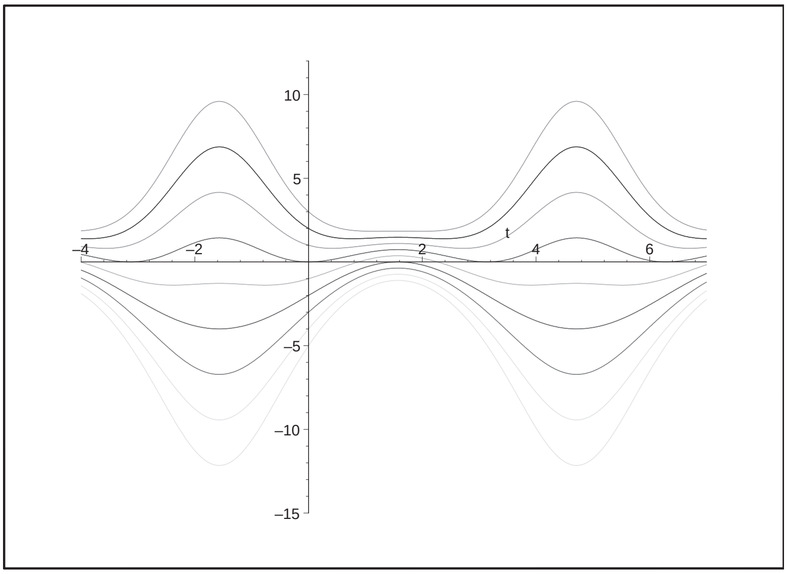
**Úloha 26** (cvičení)**.** *Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y\cos t = \sin 2t$.*

*Řešení.* Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y\cos t = 0$.

1. $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \cos t\,\mathrm{d}t$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru
$$y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme
$$K' \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}\cos t = \sin 2t;$$
dva členy s $K$ se ruší (jako vždy) a máme
$$K' = \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t.$$

3. Integrujeme:
$$\begin{aligned} K &= \int \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{\sin t}\, 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 2\sin t & v' = \mathrm{e}^{\sin t}\cos t \\ u' = 2\cos t & v = \mathrm{e}^{\sin t} \end{bmatrix} \\ &= 2\,\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - \int 2\,\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Toto vypočtené $K$ dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$ a dostáváme
$$y = (2\,\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}.$$
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy
$$y = 2(\sin t - 1) + C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$




Obrázek 17: Grafické znázornění několika řešení úlohy 26.

□

**Úloha 27.** *Řešte* $y' + 2ty = 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$.

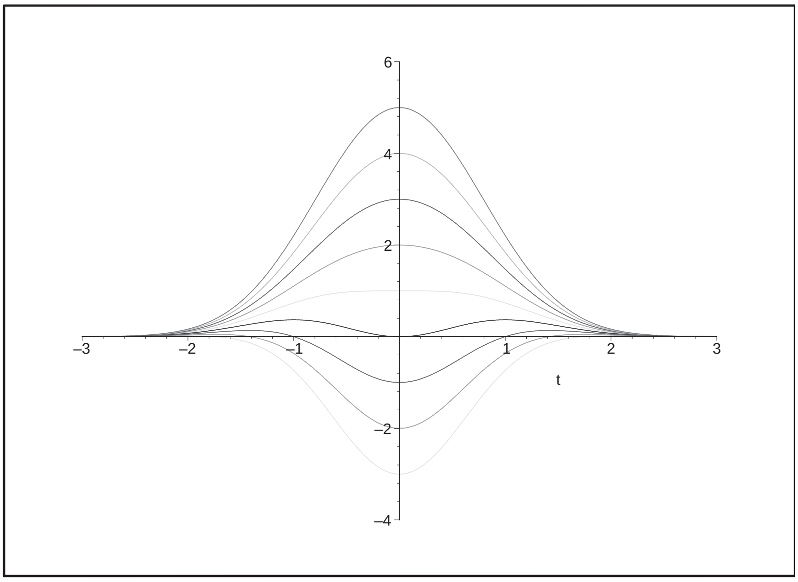
*Řešení.* Řešení HÚ:

$$y = C\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení NHÚ:

$$y = C\,\mathrm{e}^{-t^2} + t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□




Obrázek 18: Grafické znázornění několika řešení úlohy 27.

# Domácí cvičení

**Úloha 28.** *Najděte obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice:*

$y' + 2y = t^2 + 2t.$ $\left[ y = C\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1) \right]$

# KMA/M3: Přednáška č. 6

## 6 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu ($\mathrm{LDR}_{2.ř}$)

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{8}$$

kde $p$, $q$ a $f$ jsou funkce definované a spojité na jistém intervalu $J$.

Funkce $p$ a $q$ se nazývají koeficienty této DR.

Rovnice (8) se nazývá homogenní (s nulovou pravou stranou), je-li $f(x) \equiv 0$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{9}$$

Budeme ji označovat $\mathrm{HLDR}_{2.ř}$.

V případě (8) hovoříme o nehomogenní rovnici (s nenulovou pravou stranou). Budeme ji označovat $\mathrm{NLDR}_{2.ř}$.

**Příklad 1.** *a)* $y'' = -y'$, $\quad y'' + y' = 0 \qquad$ *$HLDR_{2.ř}$*

*b)* $y'' + x^2y + 1 = 0$, $\quad y'' + x^2y = -1 \qquad$ *$NLDR_{2.ř}$*

**Věta 2.** *Nechť $p$, $q$ a $f$ jsou funkce spojité na intervalu $J$. Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Pak rovnice (1) má právě jedno řešení splňující Cauchyovy počáteční podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

*Toto řešení je definováno (existuje) na celém intervalu $J$.*

**Geometrická interpretace:**

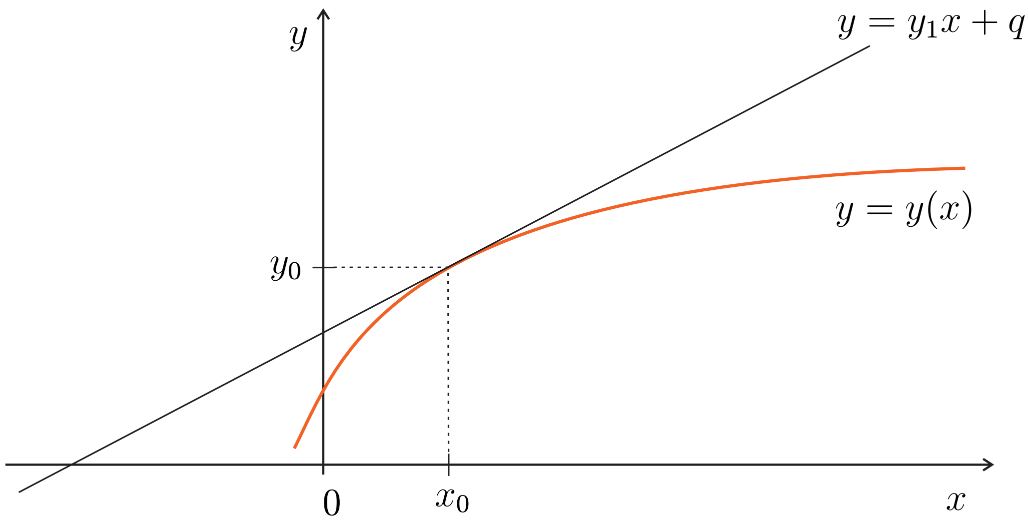
Hledáme takové řešení dané rovnice, které v bodě $x_0$ nabývá hodnoty $y_0$ a jehož derivace v bodě $x_0$ nabývá hodnoty $y_1$.

**Poznámka 2.** *Chceme-li pomocí DR formulovat úlohu, která má právě jedno řešení, musíme předepsat tolik počátečních podmínek, jaký je řád rovnice.*

*Je-li podmínek méně, má úloha nekonečně mnoho řešení, je-li jich více, nemusí mít žádné.*

### 6.1 Vlastnosti homogenních rovnic ($\mathrm{HLDR}_{2.ř}$)

**Věta 3.** *Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice (9) na $J$. Pak funkce $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, kde $C_1$, $C_2$ jsou libovolné konstanty z $\mathbb{R}$, je také řešením rovnice (9).*




Obrázek 19: Grafické znázornění řešení $y = y(x)$ splňující Cauchyovy počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

*Důkaz.* Funkci $y(x)$ dosadíme do (9).

Při označení $L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)y$ máme pro řešení (9) $y_1$ a $y_2$:

$$L(y_1) = 0, \quad L(y_2) = 0.$$

Pro jejich lineární kombinaci $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (z linearity $L$) dostáváme

$$L(y) = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_10 + C_20 = 0.$$

□

**Definice 6.1.** *Řekneme, že funkce $y_1$, $y_2$, $\ldots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, jsou* lineárně závislé *na $J$, existují-li konstanty $c_1$, $c_2$, $\ldots$, $c_r$, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, tak, že*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ry_r(x) \equiv 0,$$

*(tj. pro všechna $x \in J$).*

*V opačném případě jsou $y_1$, $y_2$, $\ldots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, na $J$* lineárně nezávislé.

Vyšetřování lineární (ne)závislosti podle definice je obtížné. Naštěstí máme k dispozici praktičtější postup. Zda jsou či nejsou funkce lineárně závislé poznáme podle wronskiánu.

**Definice 6.2.** *Buďte $y_1$, $y_2$, $\ldots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, diferencovatelné funkce na $J$. Výraz*

$$W[y_1, y_2, \ldots y_r] := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_r \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_r' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_r'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(r-1)} & y_2^{(r-1)} & \ldots & y_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

*nazýváme* wronskián *(determinant Wronského).*

Nyní si uvedeme speciální větu pro naše potřeby (dvojice lineárně nezávislých řešení naší úlohy + stačí vyšetřit v jediném bodě intervalu $J$):

**Věta 4.** *Buďte $y_1$ a $y_2$ dvě funkce diferencovatelné na $J$. Funkce $y_1$ a $y_2$ jsou lineárně nezávislé na $J$, právě když $W[y_1, y_2] \neq 0$ pro některé $x \in J$.*

**Příklad 2.** *Vyšetřete lineární (ne)závislost funkcí $\mathrm{e}^{-x}$ a $\mathrm{e}^{-2x}$.*

*Řešení.* Jsou lineárně nezávislé, protože

$$W[\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{-2x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & -2\,\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-x}(-2)\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2x} = -\,\mathrm{e}^{-3x} \neq 0,$$

pro $x \in \mathbb{R}$. □

**Příklad 3.** *Vyšetřete lineární (ne)závislost funkcí $\sin x$ a $\cos x$.*

*Řešení.* Jsou lineárně nezávislé, protože

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0,$$

pro $x \in \mathbb{R}$. □

**Definice 6.3.** *Každou dvojici lineárně nezávislých řešení $y_1$ a $y_2$ dané HLDR$_{2.ř}$ nazveme fundamentální systém řešení HLDR$_{2.ř}$ (též báze řešení HLDR$_{2.ř}$).*

**Věta 5.** *Buď $y_1$ a $y_2$ fundamentální systém řešení HLDR$_{2.ř}$. Pak každé řešení $y$ této rovnice je tvaru*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

*kde $C_1$ a $C_2$ jsou vhodné reálné konstanty.*

**Důsledky:**

1. Je-li $y_1$ partikulární řešení (9), je i $C_1 y_1$ řešení této rovnice.
2. Jsou-li $y_1$ a $y_2$ partikulární řešení (9), pak i každá jejich libovolná lineární kombinace je řešením (9).
3. Jsou-li $y_1$ a $y_2$ lineárně nezávislá partikulární řešení (tj. $y_1$ a $y_2$ tvoří fundamentální systém), pak
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$
je obecné řešení (9).
4. Fundamentální systém řešení každé HLDR$_{2.ř}$ je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení.

**Příklad 4.** *Mějme HLDR$_{2.ř}$*

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

*Pro $x \neq 0$ můžeme upravit na*

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0,$$

*odkud* $p(x) = -\frac{2}{x}$ *a* $q(x) = \frac{2}{x^2}$. *Bylo nám řečeno (ověřte), že* $y_1(x) = x$ *a* $y_2(x) = x^2$ *jsou dvě řešení. Pomocí wronskiánu,*

$$W[x, x^2] = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x - x^2 \not\equiv 0,$$

*zjistíme, že jsou lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální systém řešení naší rovnice. Obecné řešení tedy můžeme zapsat jako jejich lineární kombinaci* $y = C_1x + C_2x^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

## Domácí cvičení

**Úloha 29.** [1]

*1) Dokažte, že funkce*

$$y_1 = x \quad a \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

*tvoří pro $x \neq 0$ fundamentální systém řešení diferenciální rovnice*

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

*2) Dokažte, že funkce*

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2 + 1$$

*tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + \frac{2x}{1 - x^2} y' - \frac{2}{1 - x^2} y = 0.$$

*Vypočtěte partikulární řešení této rovnice pro počáteční podmínky*

$$y(-2) = 6, \quad y'(-2) = 3.$$

[1] Převzato z: P. Kreml a kol.: Matematika II. VŠB-TU Ostrava, `http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html`.

# KMA/M3: Přednáška č. 7

## 6.2 HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty

Zde se zaměříme na zjednodušenou HLDR$_{2.ř}$, která bude mít konstantní koeficienty $p(x) \equiv a$, $q(x) \equiv b$:

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

kterou budeme nazývat HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty.

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Hodnotu $\lambda$ (Existuje? Je jediná?) se pokusíme se nalézt dosazením $y$ do (10):

$$L = y'' + ay' + by = (\mathrm{e}^{\lambda x})'' + a(\mathrm{e}^{\lambda x})' + b(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

Dostali jsme se k rovnici

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Jelikož $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je vždy kladné, všechna řešení jsou skryta v rovnici

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{11}$$

Tu budeme nazývat *charakteristická.*

**Věta 6.** *Mějme HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty (10). Označme $\lambda_1$ a $\lambda_2$ kořeny charakteristické rovnice (11).*

1. *Jsou-li $\lambda_1$ a $\lambda_2$ dvě různá reálná čísla, pak fundamentální systém řešení (10) je tvořen funkcemi $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$; tedy obecné řešení můžeme zapsat $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$.*

2. *Jsou-li $\lambda_1$ a $\lambda_2$ dvě stejná reálná čísla (dvojnásobný kořen), pak fundamentální systém řešení (10) je tvořen funkcemi $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$; tedy obecné řešení (10) můžeme zapsat $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$.*

3. *Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$, dvě komplexně sdružená čísla, pak fundamentální systém řešení (10) je tvořen funkcemi $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ a $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$; tedy obecné řešení (10) můžeme zapsat $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.*

**Postup při řešení HLDRII s konstantními koeficienty:**

1. Sestavíme charakteristickou rovnici.
2. Řešíme charakteristickou rovnici (tj. kvadratickou rovnici).
3. Podle věty najdeme fundamentální systém a obecné řešení.

## Domácí cvičení

**Úloha 30.** *Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:*

*1)* $y'' + 4y = 0$,

*2)* $y'' - y' = 0$,

*3)* $y'' - y = 0$,

*4)* $y'' + y' - 2y = 0$,

*5)* $y'' + 3y' - 4y = 0$.

## Nepovinný dodatek pro $n > 2$

Obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice řádu vyššího než dva, například

$$y''' - 2y'' = 0,$$

se hledá velmi obdobně.
Řešíme příslušnou charakteristickou rovnici:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 0\lambda + 0 = 0 \iff \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2.$$

Všechny tři charakteristické kořeny jsou dety reálné (jeden dvojnásobný).
Fundamentální systém řešení:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{0x} = 1, \quad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{0x} = x, \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Obecné řešení:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 + C_2 x + C_3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Nakonec si ukažme, že FSŘ je opravdu tvořen lineárně nezávislými funkcemi:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 1 & x & \mathrm{e}^{2x} \\ 0 & 1 & 2\,\mathrm{e}^{2x} \\ 0 & 0 & 4\,\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = 4\,\mathrm{e}^{2x} \neq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

# KMA/M3: Přednáška č. 8

## 6.3 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Připomeňme si základní tvar nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x), \tag{12}$$

což při označení

$$L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)$$

($L$ odkazuje na slova „levá“ a „lineární“) můžeme zapsat i zkráceně:

$$L(y) = f(x). \qquad L(12)$$

Příslušnou homogenní úlohu (HÚ) podobně zapisujeme:

$$L(y) = 0. \tag{13}$$

**Věta 7.** *Je-li $Y$ partikulární řešení NLDR$_{2.ř.}$ a $\overline{y}$ obecné řešení HLDR$_{2.ř.}$, pak*

$$y = \overline{y} + Y$$

*je obecné řešení NLDR$_{2.ř.}$. (Obecné řešení NLDR$_{2.ř.}$ je rovno součtu partikulárního řešení NLDR$_{2.ř.}$ a obecného řešení HLDR$_{2.ř.}$.)*

Věta dává návod, jak najít obecné řešení NLDR (obecně i vyššího řádu než druhého).

**Postup:**

1. K dané NLDR vytvoříme příslušnou HLDR.
2. Najdeme obecné řešení HLDR, tj. $\overline{y}$, jako lineární kombinaci partikulárních řešení y1 a y2, která tvoří fundamentální systém řešení HLDR.
3. Najdeme nějaké partikulární řešení $Y$ NLDR.
4. Obecné řešení NLDR je $y = \overline{y} + Y$.

**Vlastnosti řešení NLDR**

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ je řešením DR } L(y) = f_1(x) \\ y_2 \text{ je řešením DR } L(y) = f_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} L(y_1) = f_1(x) \\ L(y_2) = f_2(x) \end{array}.$$

Co z toho vyplývá pro lineární kombinaci těchto dvou funkcí?

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x),$$

a tedy

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{je řešením DR} \quad L(y) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

**Jak hledáme partikulární řešení NLDR?**

Existují dva způsoby nalezení partikulárního řešení $Y$ NLDR:

1. METODA VARIACE KONSTANT
   Je to univerzální metoda, která je platná pro DR s konstantními i nekonstantními koeficienty. Předpokládá však, že známe fundamentální systém příslušné HLDR, který ale u rovnice s nekonstantními koeficienty neumíme najít.

   Tento postup je zdlouhavý, proto, pokud je to možné, dáváme přednost následující metodě, která je jednodušší a rychlejší.

2. METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ (též metoda odhadu)
   Dá se použít pouze v případě rovnice s konstantními koeficienty a navíc se speciální pravou stranou. Některé funkce totiž často vystupují jako pravé strany lineárních DR a podle tvaru pravé strany rovnice lze u některých speciálních případů odhadnout tvar partikulárního řešení $Y$ dané rovnice až na koeficienty, které vypočítáme.

## Metoda variace konstant

Podobně jako u lineárních DR prvního řádu, vyjdeme z obecného řešení HLDR

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Řešení $y$ NLDR hledáme v podobném tvaru, jen konstanty $C_1$ a $C_2$ nahradíme funkcemi (odtud název metody „variace konstant“):

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2.$$

Neznámé funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ hledáme tak, že $y$ dosadíme řešené NLDR. K tomu budeme potřebovat i první a druhou derivaci $y$.

Nejprve vypočteme $y'$:

$$y' = (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'.$$

Situaci si zjednodušíme tím, že součet členů, ve kterých se vyskytují derivace neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$, položíme roven nule:

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0.$$

Tím zajistíme, že ve výsledných rovnicích pro neznámé $C_1(x)$ a $C_2(x)$ se nebudou vyskytovat druhé derivace těchto funkcí, neboť nyní máme:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'.$$

Můžeme přejít k výpočtu druhé derivace:

$$y'' = (C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2')' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''.$$

Dosadíme do NLDR $(y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x))$ a upravíme:

$$\begin{aligned}\Big[C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''\Big] + \\ +p(x)\Big[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\Big] + q(x)\Big[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\Big] &= f(x), \\ C_1(x)\Big[\overbrace{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1}^{=0}\Big] + C_2(x)\Big[\overbrace{y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2}^{=0}\Big] + \\ +C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x).\end{aligned}$$

Výsledkem je tedy rovnice $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$. Společně s podmínkou $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$ máme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých funkcích $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Takovou soustavu můžeme řešit různými způsoby, ale pro nás bude výhodné použít tzv. Cramerovo pravidlo. Základním předpokladem je nenulovost determinantu matice soustavy

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že tento determinant je současně wronskiánem pro dvě lineárně nezávislá řešení $y_1$ a $y_2$, a tak tedy je nenulový.

Podle Cramerova pravidla tak máme zajištěnu existenci právě jednoho řešení soustavy, které lze vyjádřit následovně:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-f(x)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}.$$

**Věta 8.** *Buď $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ obecné řešení HLDR$_{2.ř.}$. Potom obecné řešení NLDR$_{2.ř.}$ je tvaru*

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

*přičemž funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují soustavu*

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

**Poznámka 3.** *Jak v tomto tvaru řešení najdeme avizovaný rozklad na $y = \overline{y} + Y$? Neznámé funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ získáme integrací, takže je můžeme vyjádřit následovně ($C_1$ a $C_2$ jsou integrační konstanty):*

$$C_1(x) = K_1(x) + C_1, \quad C_2(x) = K_2(x) + C_2.$$

*Po dosazení do předchozí věty:*

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = (K_1(x) + C_1)y_1 + (K_2(x) + C_2)y_2 \\ &= K_1(x)y_1 + C_1y_1 + K_2(x)y_2 + C_2y_2 \\ &= \big(C_1y_1 + C_2y_2\big) + \big(K_1(x)y_1 + K_2(x)y_2\big) \\ &= \overline{y} + Y. \end{aligned}$$

**Úloha 31.** *Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - y = \sin x.$$

*Řešení.* Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou variace konstant. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)\,\mathrm{e}^x + C_2(x)\,\mathrm{e}^{-x},$$

kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)\,\mathrm{e}^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)(-\,\mathrm{e}^{-x}) &= \sin x. \end{aligned}$$

Řešíme:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} \\ \sin x & -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x(-\,\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\sin x,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ \mathrm{e}^x & \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{\sin x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(-\,\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\sin x.$$

Nyní nás čeká integrace.

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Výpočty necháme pod čarou[2] a nakonec dostáváme

$$C_1(x) = -\frac{1}{4}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{4}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2,$$

a tedy obecné řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= \left(-\frac{1}{4}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_1\right)\mathrm{e}^{x} + \left(\frac{1}{4}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= -\frac{1}{4}(\sin x + \cos x) + C_1\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}(\cos x - \sin x) + C_2\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{4}(-\sin x - \cos x + \cos x - \sin x) + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{4}(-2\sin x) + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} = -\frac{1}{2}\sin x + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

**Závěr:** Diferenciální rovnice $y'' - y = \sin x$ má obecné řešení $y = -\frac{1}{2}\sin x + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$.

□

**Úloha 32.** *Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}.$$

*Řešení.* Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR)}\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ)}\ y_1 = \mathrm{e}^{x},\ y_2 = x\,\mathrm{e}^{x}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{x}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou variace konstant. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2(x)x\,\mathrm{e}^{x},$$

---

[2]Metodou per partes vypočteme $\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^{-x} & v' = \sin x \\ u' = -\mathrm{e}^{-x} & v = -\cos x \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x) - \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^{-x} & v' = \cos x \\ u' = -\mathrm{e}^{-x} & v = \sin x \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x) - \left(\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\right) = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$. (Na obou stranách stejný integrál, ale s opačnými znaménky.)

$2\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{-x}}$.

Obdobně $\boxed{\int \mathrm{e}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\,\mathrm{e}^{x}}$.

kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují soustavu

$$\begin{array}{rcl} C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)x\,\mathrm{e}^x &=& 0, \\ C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)[\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x] &=& \frac{\mathrm{e}^x}{x}. \\ \hline \end{array}$$

Tuto soustavu na ukázku nebudeme řešit pomocí Cramerova pravidla, ale pro její jednoduchost nejprve od druhé rovnice odečteme první a dostaneme

$$C_2'(x)\,\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \;\Rightarrow\; C_2'(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; C_2(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní $C_2'(x) = \frac{1}{x}$ dosadíme zpět do první rovnice a dostaneme:

$$C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}x\,\mathrm{e}^x = 0, \quad C_1'(x) = -1 \;\Rightarrow\; C_1(x) = \int -1\,\mathrm{d}x = -x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= (-x + C_1)\,\mathrm{e}^x + (\ln|x| + C_2)x\,\mathrm{e}^x \\ &= \underbrace{C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 x\,\mathrm{e}^x}_{=\overline{y}} \underbrace{-x\,\mathrm{e}^x + \ln|x|x\,\mathrm{e}^x}_{=Y},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Závěr:** Diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ má obecné řešení

$$y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 x\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + \ln|x|x\,\mathrm{e}^x.$$

□

## Domácí cvičení

**Úloha 33.** [3]

*1) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \qquad \left[y(x) = \mathrm{e}^x(C_1 + C_2 x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \ln(x^2+1) + x\,\mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x\right].$$

*2) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 2y' = x\,\mathrm{e}^x \qquad \left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2 - x\,\mathrm{e}^x\right].$$

*3) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - y' - 12y = 14\,\mathrm{e}^x \qquad \left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} - \frac{7}{6}\,\mathrm{e}^x\right].$$

*4) Najděte (metodou variace konstant) řešení počáteční úlohy*

$$y'' - 2y' + y = 3\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e},\ y'(1) = 2\,\mathrm{e} \qquad \left[y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{10}(8\sqrt{x^5} + 5x - 3)\right].$$

*5) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + 1} \;\left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-2x}\ln(1 + \mathrm{e}^x)\right].$$

[3] Převzato z: P. Kreml a kol.: Matematika II. VŠB-TU Ostrava, `http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html`.

# KMA/M3: Přednáška č. 9

## Metoda neurčitých koeficientů

Jde o metodu kvalifikovaného odhadu tvaru partikulárního řešení nehomogenní úlohy, kde pro jisté typy pravých stran víme, jak má příslušné partikulární řešení vypadat, až na nějaké konstanty, které musíme dopočítat dosazením tohoto částečně neurčitého řešení do rovnice.

### Úvodní příklady

**Příklad 5.** *Pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ volíme $Y = A\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient), který musíme ještě dopočítat (dosazením do řešené rovnice).*

*Konkrétně například $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{3x}$:*

*Zde máme obecné řešení HÚ*

$$\overline{y} = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{x},$$

*neboť $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.*

*Jako partikulární řešení zvolme $Y = A\,\mathrm{e}^{3x}$. Pro dosazení potřebujeme dopočítat $Y' = 3A\,\mathrm{e}^{3x}$ a $Y'' = 9A\,\mathrm{e}^{3x}$. Po dosazení dostaneme*

$$Y'' - 2Y' + Y = \mathrm{e}^{3x}, \quad (9A\,\mathrm{e}^{3x}) - 2(3A\,\mathrm{e}^{3x})' + (A\,\mathrm{e}^{3x}) = \mathrm{e}^{3x},$$

$$4A\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}, \quad 4A = 1, \quad A = \frac{1}{4},$$

*a tak dostáváme*

$$Y = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3x}.$$

*Dohromady*

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Drobný problém může nastat, když tato volená funkce je již obsažena v obecném řešení homogenní úlohy. V takovém případě by se $Y$ „rozplynulo“ v $\overline{y}$ a funkce $y = \overline{y} + Y$ by byla stále jenom řešením homogenní úlohy.

**Příklad 6.** *Předvedeme si to na rovnici $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$:*

*Zde máme obecné řešení homogenní úlohy*

$$\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x},$$

*neboť $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$.*

*Když pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ zvolíme $Y = A\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient), dostaneme funkci, která je již obsažena v $\overline{y}$, a tak pro libovolné $A \in \mathbb{R}$ nedostaneme nic navíc:*

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + A)\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$$

*je jen jiným tvarem $\overline{y}$, a tak stále jenom řešením homogenní úlohy.*

Jde o jistou formu násobnosti (stejně jako u charakteristických kořenů), a tak to vyřešíme obdobně, volené (neurčité řešení) násobíme $x$, tedy $Y = Ax\,\mathrm{e}^{3x}$, případně $x^2$, $Y = Ax^2\,\mathrm{e}^{3x}$, pokud je v $\overline{y}$ i funkce $x\,\mathrm{e}^{3x}$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 3$).

**Příklad 7** (—dokončení)**.** *Pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ a obecné řešení HÚ $\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$ tedy volíme $Y = Ax\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient). Takto se vyhneme funkci, která je již obsažena v $\overline{y}$.*

*Dopočítáme:*

$$Y' = A\,\mathrm{e}^{3x} + 3Ax\,\mathrm{e}^{3x} = (A + 3Ax)\,\mathrm{e}^{3x}$$

*a*

$$Y'' = 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 9Ax\,\mathrm{e}^{3x} = (6A + 9Ax)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

*Dosadíme do $Y'' - 2Y' - 3Y = \mathrm{e}^{3x}$:*

$$(6A + 9Ax)\,\mathrm{e}^{3x} - 2(A + 3Ax)\,\mathrm{e}^{3x} - 3Ax\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}, \quad 4A = 1, \quad A = \frac{1}{4},$$

*a tak dostáváme*

$$Y = \frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

*Dohromady:*

$$y = \overline{y} + Y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{3x} = (C_1 + \frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{3x}) + C_2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 8** (Vyšší násobnost)**.** *Jak už jsme uvedli dříve, v případě výskytu funkce $x\,\mathrm{e}^{3x}$ v obecném řešení HÚ, je třeba $A\,\mathrm{e}^{3x}$ vynásobit $x^2$. Ukážeme si to na rovnici s dvojnásobným reálným charakteristickým kořenem $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$: $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$:*

*Pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ a obecné řešení HÚ $\overline{y} = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{3x}$ tedy volíme $Y = Ax^2\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient). Takto se vyhneme funkcím, které jsou již obsaženy v $\overline{y}$.*

*Dopočítáme:*

$$Y' = 2Ax\,\mathrm{e}^{3x} + 3Ax^2\,\mathrm{e}^{3x} = (2Ax + 3Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x}$$

*a*

$$Y'' = 2A\,\mathrm{e}^{3x} + 6Ax\,\mathrm{e}^{3x} + 6Ax\,\mathrm{e}^{3x} + 9Ax^2\,\mathrm{e}^{3x} = (2A + 12Ax + 9Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

*Dosadíme do $Y'' - 6Y' + 9Y = \mathrm{e}^{3x}$:*

$$(2A + 12Ax + 9Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x} - 6(2Ax + 3Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x} + 9Ax^2\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}, \quad 2A = 1, \quad A = \frac{1}{2},$$

*a tak dostáváme*

$$Y = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

*Dohromady:*

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x} = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)\,\mathrm{e}^{3x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Metoda**

Tato metoda může vést k cíli rychleji a jednodušeji než variace konstant, ALE její použití se omezuje jen na rovnice s konstantními koeficienty a pravá strana musí být speciálního typu. Jedná se o lineární kombinaci funkcí tvaru

$$f_1(x) = p_1(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad f_2(x) = p_2(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad f_3(x) = p_3(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kde $p_1, p_2, p_3$ jsou polynomy a $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (pro $\lambda = 0$ dostáváme „čistý“ polynom $p_1(x)$).

Již jsme si ukazovali, že pokud budeme znát řešení pro každou pravou stranu zvlášť, pak výsledné celkové řešení bude lineární kombinací dílčích řešení, se stejnými koeficienty jako jsou použity u pravých stran:

$$\Big(L(y_1) = f_1(x),\ L(y_2) = f_2(x),\ L(y_3) = f_3(x)\Big) \implies$$
$$\implies \quad L(ay_1 + by_2 + cy_3) = af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x).$$

Jistě jste si všimli, že (až na násobení polynomem) „povolenými“ pravými stranami jsou funkce, které se objevují jako řešení homogenní úlohy s konstantními koeficienty:

- $\mathrm{e}^{\lambda x}$ pro reálný charakteristický kořen $\lambda$,
- $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ a $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ pro komplexní char. kořen $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

V úvodních příkladech jsme si ukázali, že takto může dojít ke konfliktu při volbě (neurčitého tvaru) partikulárního řešení $Y$. V příkladech jsme tomu zamezili případným vynásobením mocninou $x$. Abychom mohli tento postup formalizovat, označíme si exponent $x$ písmenem $N$ ($N$ jako násobnost).

Bude nás zajímat vztah mezi $\lambda$ z pravé strany a charakteristickými kořeny příslušné homogenní úlohy. Tento vztah zaznamenáme pomocí veličiny $N$, která v našem případě může nabývat hodnoty

- 0, pokud $\lambda$ není char. kořenem,
- 1, pokud $\lambda$ je jednoduchým char. kořenem,
- 2, pokud $\lambda$ je dvojnásobným char. kořenem[4].

Při tomto nastavení můžeme vyslovit následující větu o volbě partikulárního řešení.

**Věta 9.** *Nechť $p$ je polynom stupně $s \geq 0$, nechť*

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{$*$}$$

*je rovnice s konstantními koeficienty a nechť $N$ je výše definovaná veličina vztažená k naší rovnici (*).*

*Pak platí:*

*a) Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ a $f(x) = p(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, existuje polynom $q$ stupně nejvýše $s$ tak, že funkce $Y(x) := x^N q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ je partikulárním řešením rovnice (*).*

*b) Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, a je-li $f(x)$ rovno $p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ nebo $p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$, existují polynomy $q$ a $r$ stupně nejvýše $s$ tak, že funkce $Y(x) := x^N\,\mathrm{e}^{\alpha x}(q(x)\cos\beta x + r(x)\sin\beta x)$ je partikulárním řešením rovnice (*).*

[4] Obecně, u rovnic $n$-tého řádu, může být $N = k$, $k \leq n$, když je $\lambda$ $k$-násobným char. kořenem.

**Ukázky volby $Y$**

$\mathbb{R}$-a) Shoda s jednoduchým charakteristickým kořenem: $y'' - y = (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{e}^x$

HÚ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$;

NHÚ: $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{e}^x \approx p(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $p(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \operatorname{st} p = 2$, $\lambda = 1 = \lambda_1 \Rightarrow N = 1$;

$$Y = x^N \cdot q(x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = x^1 \cdot (Ax^2 + Bx + C) \cdot \mathrm{e}^{1\cdot x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx) \cdot \mathrm{e}^x \,.$$

$\mathbb{R}$-b) Neshoda s charakteristickými kořeny: $y'' - y = (2x + 5)\,\mathrm{e}^{2x}$:

HÚ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$;

NHÚ: $f(x) = (2x + 5)\,\mathrm{e}^{2x} \approx p(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $p(x) = 2x + 5 \Rightarrow \operatorname{st} p = 1$, $\lambda = 2 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow N = 0$;

$$Y = x^N \cdot q(x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = x^0 \cdot (Ax + B) \cdot \mathrm{e}^{2\cdot x} = (Ax + B) \cdot \mathrm{e}^{2x} \,.$$

$\mathbb{R}$-c) Shoda s (dvoj)násobným charakteristickým kořenem: $y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^x$:

HÚ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

NHÚ: $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x \approx p(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $p(x) = 2 \Rightarrow \operatorname{st} p = 0$, $\lambda = 1 = \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow N = 2$;

$$Y = x^N \cdot q(x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = x^2 \cdot (A) \cdot \mathrm{e}^{1\cdot x} = Ax^2 \cdot \mathrm{e}^x \,.$$

$\mathbb{C}$-d) Shoda s charakteristickým kořenem: $y'' + 4y = \sin 2x$:

HÚ: $\lambda_1 = 0 + \mathrm{i}\,2$, $\lambda_2 = 0 - \mathrm{i}\,2$;

NHÚ: $f(x) = \sin 2x \approx p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$, $p(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{st} p = 0$, $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta = 0 + \mathrm{i}\,2 = \lambda_1 \Rightarrow N = 1$;

$$\begin{aligned} Y &= x^N\,\mathrm{e}^{\alpha x}(q(x)\cos\beta x + r(x)\sin\beta x) = x^1\,\mathrm{e}^{0\cdot x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = \\ &= x(A\cos 2x + B\sin 2x). \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$-e) Neshoda s charakteristickými kořeny: $y'' + 4y = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x$:

HÚ: $\lambda_1 = 0 + \mathrm{i}\,2$, $\lambda_2 = 0 - \mathrm{i}\,2$;

NHÚ: $f(x) = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x \approx p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$,

$p(x) = 3x \Rightarrow \operatorname{st} p = 1$, $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta = 3 + \mathrm{i}\,2 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow N = 0$;

$$\begin{aligned} Y &= x^N\,\mathrm{e}^{\alpha x}(q(x)\cos\beta x + r(x)\sin\beta x) = x^0\,\mathrm{e}^{3\cdot x}\Big[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x\Big] \\ &= \mathrm{e}^{3\cdot x}\Big[(Ax + B)\cos 2x + (cx + D)\sin 2x\Big]. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$-f) Shoda s charakteristickým kořenem: $y'' - 4y' + 5y = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x}\cos x$:

HÚ: $\lambda_1 = 2+\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 2-\mathrm{i}$;

NHÚ: $f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x}\cos x \approx p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$,

$p(x) = (x^2+1) \Rightarrow \operatorname{st} p = 2, \quad \lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta = 2+\mathrm{i} = \lambda_1 \Rightarrow N = 1;$

$$\begin{aligned} Y &= x^N\,\mathrm{e}^{\alpha x}(q(x)\cos\beta x + r(x)\sin\beta x) \\ &= x^1\,\mathrm{e}^{2\cdot x}\Big[(Ax^2+Bx+C)\cos x + (Dx^2+Ex+F)\sin x\Big] \\ &= \mathrm{e}^{2\cdot x}\Big[(Ax^3+Bx^2+Cx)\cos x + (Dx^3+Ex^2+Fx)\sin x\Big]. \end{aligned}$$

## Řešené příklady

**Úloha 34.** *Metodou neurčitých koeficientů nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - y = \sin x.$$

*Řešení.* Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou neurčitých koeficientů. Rozklíčujeme pravou stranu:

$$f(x) = \sin x = \mathrm{e}^{0\cdot x}\sin 1\cdot x \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 + i\cdot 1 = i \notin \{1,-1\} \quad \Longrightarrow \quad N = 0.$$

Partikulární řešení nehomogenní úlohy tedy budeme hledat ve tvaru

$$Y = x^0\,\mathrm{e}^{0\cdot x}(A\cos 1\cdot x + B\sin 1\cdot x) = A\cos x + B\sin x.$$

Ještě vypočteme první a druhou derivaci a dosadíme do nehomogenní úlohy:

$$Y' = -A\sin x + B\cos x, \qquad Y'' = -A\cos x - B\sin x,$$

$$\begin{aligned} Y'' - Y &= \sin x, \\ (-A\cos x - B\sin x) - (A\cos x + B\sin x)Y &= \sin x, \\ -2A\cos x - 2B\sin x &= \sin x, \\ -2A\cos x - (2B+1)\sin x &= 0. \end{aligned}$$

Aby byla splněna rovnost (jde vlastně o lineární kombinaci lineárně nezávislých funkcí), musí se oba koeficienty rovnat nule:

$$(-2A = 0,\ -(2B+1) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (A = 0,\ B = -\frac{1}{2}),$$

a tedy $Y = 0 \cdot \cos x - \frac{1}{2} \sin x = -\frac{1}{2} \sin x$.

**Závěr:** Diferenciální rovnice $y'' - y = \sin x$ má obecné řešení

$$y = \overline{y} + Y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

□

**Úloha 35.** *Metodou neurčitých koeficientů vyřešte počáteční úlohu*

$$y'' + 2y' + y = x^2 + \cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

*Řešení.* Pravá strana je složena ze dvou částí:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + \cos x.$$

K řešené rovnici zapíšeme dvě dílčí:

$$y'' + 2y' + y = x^2 \quad \text{a} \quad y'' + 2y' + y = \cos x.$$

Součet jejich řešení nám dá řešení původní rovnice:

$$\big( L(y_1) = f_1(x), \quad L(y_2) = f_2(x) \big) \quad \Longrightarrow \quad L(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

HÚ je stejná pro obě dílčí rovnice.

- Char. rovnice: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda + 1)^2 = 0$.
- Char. kořeny: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
- OŘHÚ: $\overline{y} = (C_1 + C_2 x) \mathrm{e}^{-x}$.

Nyní budeme hledat partikulární řešení dílčích rovnic.

1) Pro pravou stranu $f_1(x) = x^2 = x^2 \mathrm{e}^{0x}$ máme

$$s = 2, \quad \lambda = 0 \neq \lambda_{1,2} \ \Rightarrow \ N = 0.$$

Partikulární řešení bude mít (neurčitý) tvar

$$Y_1(x) := x^N q(x) \mathrm{e}^{\lambda x} = x^0 (Ax^2 + Bx + C) \mathrm{e}^{0x} = Ax^2 + Bx + C.$$

Dopočteme derivace: $Y_1'(x) = 2Ax + B, \quad Y_1''(x) = 2A$.
Dosadíme do rovnice $Y_1'' + 2Y_1' + Y_1 = f_1(x)$:

$$2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

$$Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1,$$

a tedy (porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin $x$):

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ 4A + B & = & 0 \\ 2A + 2B + C & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} A & = & 1 \\ B & = & -4 \\ C & = & 6 \end{array} \Longrightarrow Y_1(x) = x^2 - 4x + 6.$$

2) Pro pravou stranu $f_2(x) = \cos x = 1 \cdot \mathrm{e}^{0x} \cos 1 \cdot x$ máme

$$s = 0, \quad \lambda = 0 + i \cdot 1 \neq \lambda_{1,2} \;\Rightarrow\; N = 0.$$

Partikulární řešení bude mít (neurčitý) tvar

$$\begin{aligned} Y_2(x) &:= x^N \mathrm{e}^{\alpha x}(q(x) \cos \beta x + r(x) \sin \beta x) \\ &= x^0 \mathrm{e}^{0x}(A \cos 1 \cdot x + B \sin 1 \cdot x) = A \cos x + B \sin x). \end{aligned}$$

Dopočteme derivace: $Y_2'(x) = -A \sin x + B \cos x$, $\quad Y_2''(x) = -A \cos x - B \sin x$.
Dosadíme do rovnice $Y_2'' + 2Y_2' + Y_2 = f_2(x)$:

$$(-A \cos x - B \sin x) + 2(-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x) = \cos x,$$

$$2B \cos x - 2A \sin x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x,$$

a tedy (porovnáme koeficienty u jednotlivých (lineárně nezávislých) funkcí $\cos x$ a $\sin x$):

$$\begin{array}{rcl} 2B &=& 1 \\ -2A &=& 0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} A &=& 0 \\ B &=& \frac{1}{2} \end{array} \Longrightarrow Y_2(x) = \frac{1}{2} \sin x.$$

Nyní dílčí řešení $Y_1$ a $Y_2$ sečteme. Partikulární řešení naší rovnice je

$$Y = Y_1 + Y_2 = x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{2} \sin x.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2 x) \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{2} \sin x.$$

Počáteční úloha $y(0) = y'(0) = 0$:

$$y'(x) = (-C_1 + C_2 - C_2 x) \mathrm{e}^{-x} + 2x - 4 + \frac{1}{2} \cos x,$$

$$\begin{aligned} (y(0) =)\ (C_1 + C_2 \cdot 0) \mathrm{e}^{-0} + 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 + \frac{1}{2} \sin 0 &= 0, \\ (y'(0) =)\ (-C_1 + C_2 - C_2 \cdot 0) \mathrm{e}^{-0} + 2 \cdot 0 - 4 + \frac{1}{2} \cos 0 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} (y(0) =)\ C_1 + 6 \;=\; 0, (y'(0) =)\ -C_1 + C_2 - 4 + \frac{1}{2} = 0. \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = -6, \\ C_2 = -\frac{5}{2}. \end{array}$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y = (-6 - \frac{5}{2} x) \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{2} \sin x.$$

□

## Domácí cvičení

**Úloha 36.** *Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:*

*1)* $y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

$$\left[y(x) = \frac{16}{17}\cos 2x - \frac{9}{34}\sin 2x + \frac{1}{17}\,\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17}\,\mathrm{e}^x \sin 2x\right].$$

*2)* $y'' - y' = x,$ $\qquad \left[y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right].$

*3)* $y'' - y = x,$ $\qquad \left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} - x\right].$

*4)* $y'' + y' - 2y = 3x\,\mathrm{e}^x,$ $\qquad \left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\right].$

*5)* $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-4x} + x\,\mathrm{e}^{-x},$

$$\left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} - \frac{x}{5}\,\mathrm{e}^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{e}^{-x}\right].$$

# KMA/M3: Přednáška č. 10

# Diferenční rovnice

## 7 Diferenční rovnice prvního řádu

### 7.1 Úvod

Uvažujme veličinu, jejíž hodnoty nás zajímají pouze v nějakých diskrétních okamžicích. Jako ilustrační příklad budeme uvažovat stav populace králíka divokého v Austrálii. Ten se tam dostával s prvními loděmi již od roku 1788, ale zajímavější vývoj nastává až od roku 1859, kdy farmář T. A. vysazuje na svém pozemku 24 králíky. Odhaduje se, že během pouhých patnácti let jejich počet narostl na dva miliony. Tyto hodnoty můžeme zapsat

$$x(1859) = 24, \quad x(1874) = 2\,000\,000.$$

Tento zápis má tu výhodu, že okamžitě víme, ke kterému roku je ten který počet vztažen. Můžeme ovšem použít i jiné označení,

$$x(0) = 24, \quad x(15) = 2\,000\,000,$$

které nám zase říká, že na počátku jich bylo 24, pak čtrnáct údajů chybí a po patnácti časových jednotkách (letech) máme stav 2 000 000. Obě značení jsou možná, ale v teorii je běžnější to druhé.

Představme si, že žijeme právě v roce 1874 a zajímá nás, jak by se mohly počty králíku do budoucna vyvíjet. Máme tedy k dispozici pouze údaje za roky 1859 a 1874 (resp. 0 a 15). O králících toho mnoho nevíme, ale to nám nebrání, čistě teoreticky, matematicky prozkoumat některé jednoduché hypotézy:

a) Růst populace je více-méně konstantní, tedy když za patnáct let přibyly zhruba dva miliony králíků, tak za dalších patnáct let můžeme očekávat zhruba čtyři miliony ($x(30) = 4\,000\,000$). Takový model jistě není příliš důvěryhodný, ale zkuste se zamyslet, jestli jej někdy v životě (většinou milně) nepoužíváme.

   Ale berme to teď čistě modelově. Jak můžeme matematicky zapsat, že každoroční přírůstek je konstantní? Můžeme použít zápis ($P$ je onen konstantní přírůstek)

   $$x(n+1) = x(n) + P, \quad n \geq 0$$

   (v našem případě máme $P = \frac{2\,000\,000-24}{15}$).

   S rovnicí $x(n+1) = x(n) + P$ jste se již dříve mohli setkat při rekurentním zadání posloupností. My je budeme nazývat *diferenční rovnice* a posloupnostem, které jsou jimi takto rekurentně zadány říkáme *řešení diferenční rovnice*. Pokud na ta řešení nebudeme mít nějaké dodatečné požadavky, tak jich bude nekonečně mnoho, například posloupnosti:

   $$1, 1+P, 1+2P, 1+3P, \ldots \qquad \text{nebo} \qquad 25+P, 25+2P, 25+3P, \ldots.$$

V našem příkladu získáme potřebnou posloupnost tak, že k rovnici přidáme tzv. počáteční podmínku $x(0) = 24$ (hodnotu $x(15)$ jsme již použili pro výpočet $P$), a tak dostáváme

$$x(n+1) = x(n) + P, \quad x(0) = 24,\ n \geq 0.$$

Řešením je tedy posloupnost

$$x(n) = 24 + n \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15},\ n \geq 0.$$

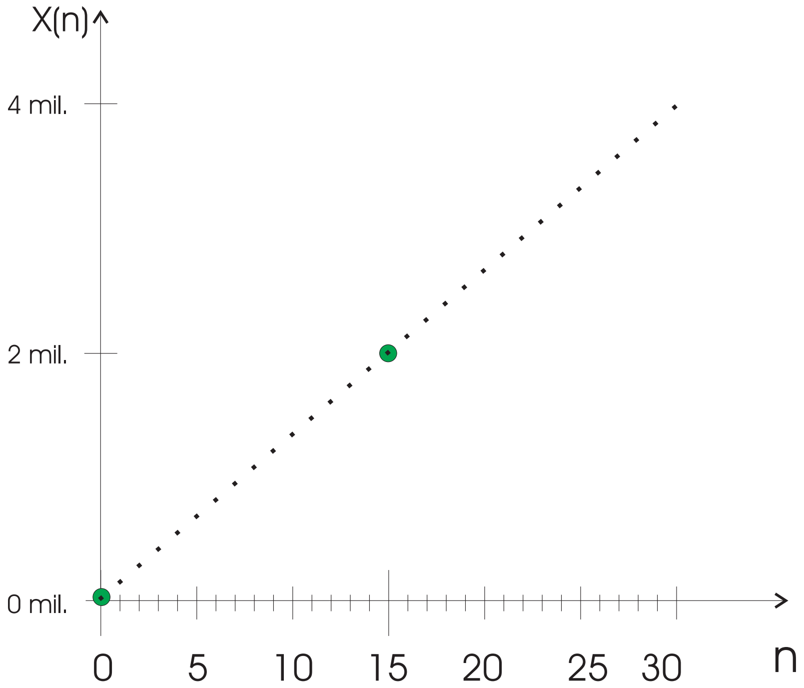
Snadno nahlédneme, že skutečně

$$x(0) = 24 + 0 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 24, \quad x(15) = 24 + 15 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 2\,000\,000$$

a

$$x(30) = 24 + 30 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 3\,999\,976.$$

Graficky znázorněno:




Obrázek 20: Model: konstantní růst

b) Populace v následujícím roce je vždy $k$-násobkem populace předchozího roku, $k > 0$ ($k > 1$ znamená zvětšování počtu, $k = 1$ stagnace počtu a $k \in (0; 1)$ pokles). Dostáváme diferenční rovnici s počáteční podmínkou

$$x(n+1) = k \cdot x(n), \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

Řešení:

$$x(0) = 24,\ x(1) = k \cdot x(0) = 24 \cdot k,\ x(2) = k \cdot x(1) = 24 \cdot k^2, \ldots x(n) = 24 \cdot k^n, \ldots.$$

Neznámou konstantu $k$ vypočteme z rovnice

$$x(15) = 2\,000\,000, \quad 24 \cdot k^{15} = 2\,000\,000, \quad k^{15} = \frac{2\,000\,000}{24}, \quad k = \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{1}{15}} \doteq 2{,}13.$$

Diferenční rovnice:

$$x(n+1) = \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{1}{15}} \cdot x(n), \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

Řešení:

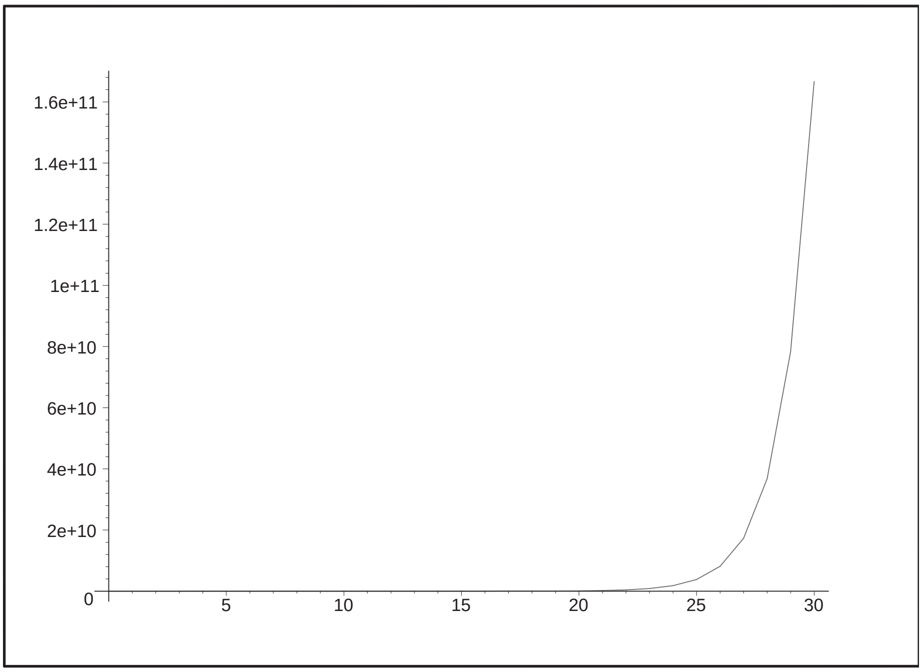
$$x(n) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{n}{15}}, \quad n \geq 0.$$

Výpočty:

$$x(0) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{0}{15}} = 24, \quad x(15) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{15}{15}} = 2\,000\,000,$$

$$x(30) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{30}{15}} = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{2} \doteq 166\,666\,666\,666.$$

Graficky znázorněno:




Obrázek 21: Model: exponenciální růst

Diferenční rovnice se používají k popisu vývoje nějaké veličiny v (po sobě jdoucích) diskrétních časových okamžicích. Pro jednoduchost si tyto okamžiky budeme označovat pomocí nezáporných celých čísel $n \geq n_0 \geq 0$. Hodnotu zkoumané veličiny v čase $n$ budeme například značit $x(n)$ (nebo $y(n)$). Pokud bereme v úvahu neukončený vývoj veličiny $x$, potom jde vlastně o posloupnost $(x(n))_{n=n_0}^{+\infty}$

Diferenční rovnice , jestliže nějaká populace má diskrétní generace, velikost $(n+1)$. generace $x(n+1)$ je funkcí $n$-té generace $x(n)$. Tento vztah se vyjadřuje jako *diferenční rovnice*

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{15}$$

Na tento problém ale můžeme nahlížet i z jiného úhlu pohledu. Řekněmě, že zvolíme počáteční bod $x_0$ a budeme generovat posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots.$$

Pro zjednodušení přijmeme označení

$$f^2 = f(f(x_0)), f^3 = f(f(f(x_0))), \dots.$$

$f(x_0)$ nazýváme *první iterací* $x_0$ vzhledem k $f$; $f^2(x_0)$ nazýváme druhou iterací $x_0$ vzhledem k $f$; a obecně, $f^n(x_0)$ je $n$-tou iterací $x_0$ vzhledem k $f$. Množina všech (kladných) iterací $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ ($f^0(x_0) = x_0$) se nazývá *(kladná) orbita* bodu $x_0$ a budeme ji označovat $O(x_0)$. Tato iterativní procedura je příkladem *diskrétního dynamického systému.* S nastavením $x(n) = f^n(x_0)$ dostáváme

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f\left[f^n(x_0)\right] = f(x(n)),$$

čímž opět dostáváme (15). Všimněme si, že $x(0) = f^0(x_0) = x_0$. Například, nechť $f(x) = x^2$ a $x_0 = 0,6$. Nyní, například na kalkulačce, počítáme opakovaně druhou mocninu a dostáváme posloupnost

$$0,6,\ 0,36,\ 0,1296,\ 0,01679616,\ \dots.$$

Ještě pár iterací a každému je jasné, že iterace $f^n(0,6)$ směřují k nule. Dokažte, že stejnou limitu mají iterace pro $x_0 \in (-1;1)$, zatímco pro $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ směřují k nekonečnu. Zřejmě $f^n(0) = 0$ a $f^n(1) = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$ a $f^n(-1) = 1$ pro $n = 1, 2, \dots$.

Z předchozího textu je zřejmé, že diferenční rovnice a diskrétní dynamické systémy představují dvě strany jedné mince. Když matematici hovoří o diferenčních rovnicích, obvykle mají na mysli analytickou teorii předmětu, zatímco diskrétní dynamické systémy se váží k topologickým a geometrickým aspektům.

Jestliže funkci $f$ v (15) nahradíme funkcí $g$ dvou proměnných, $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{Z}^+$ je množina všech nezáporných celých čísel a $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel, potom dostaneme

$$x(n+1) = g(n, x(n)). \tag{16}$$

Rovnici (16) nazýváme *neautonomní* nebo závislou na čase, zatímco (15) je *autonomní* nebo nezávislá na čase. Studium (16) je mnohem komplikovanější.

## 7.2 Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Zde budeme studovat lineární rovnice — nejjednodušší speciální případy rovnic (15) a (16). Typická lineární *homogenní* rovnice prvního řádu má tvar

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \tag{17}$$

a příslušná *nehomogenní* rovnice je dána předpisem

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{18}$$

kde u obou rovnic předpokládáme, že $a(n) \neq 0$ a $a(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0 \geq 0$.

Řešení homogenní rovnice (17) můžeme získat prostým iterováním:

$$\begin{aligned}
x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0,\\
x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0,\\
x(n_0+3) &= a(n_0+2)x(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0.
\end{aligned}$$

A pomocí indukce snadno nahlédneme, že[5]

$$\begin{aligned}
x(n) &= x(n_0+n-n_0)\\
&= a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)x_0\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Jednoznačné řešení nehomogenní rovnice (18) může být nalezeno následovně:

$$\begin{aligned}
y(n_0+1) &= a(n_0)y_0 + g(n_0),\\
y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1)\\
&= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1).
\end{aligned}$$

Dá se dokázat, opět pomocí matematické indukce[6], že pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \qquad (20)$$

### 7.2.1 Důležité speciální případy

Existují dva speciální případy rovnice (18), které jsou důležité v mnoha aplikacích. První rovnice je dána vztahem

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), \quad y(0) = y_0. \qquad (21)$$

[5]Připomeňme, že při zkráceném zápisu součinu a součtu prvků ve speciálních případech platí: $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$ a $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$.

[6]Při důkazu matematickou indukcí předpokládáme platnost vztahu (20) pro $n = k$, a tedy:

$$y(k) = \left[\prod_{j=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right] g(r).$$

S použitím (18), $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$, dostáváme:

$$\begin{aligned}
y(k+1) &= a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left[a(k)\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right] g(r) + g(k)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r) + \left[\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right] g(k)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r).
\end{aligned}$$

Tudíž vztah (20) platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$.

S použitím (20) zde dostaneme řešení

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \tag{22}$$

Druhé, ještě větší zjednodušení,

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad y(0) = y_0, \tag{23}$$

má řešení (využijeme (22))

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right], & \text{jestliže} \quad a \neq 1, \\ y_0 + bn, & \text{jestliže} \quad a = 1. \end{cases} \tag{24}$$

Na procvičení předchozích formulí uvedeme několik příkladů.

**Příklad 9.** *Vyřešte rovnici*

$$y(n+1) = (n+1)y(n) + 2^n(n+1)!, \quad y(0) = 1, \quad n > 0.$$

*Řešení.*

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] 1 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} (i+1)\right] 2^r(r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{n!}{(r+1)!}\right] 2^r(r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r \\ &= 2^n n!, \end{aligned}$$

neboť

$$n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r = n!\left(1 + \sum_{r=0}^{n-1} 2^r\right) = n!\left(1 + 1\frac{1-2^n}{1-2}\right) = n!\,(1 - 1 + 2^n) = n! 2^n.$$

□

**Příklad 10.** *Řešte rovnici*

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0,5.$$

*Řešení.* $a(n) \equiv 2$ a $n_0 = 1$, tudíž

$$\begin{aligned}
x(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) = \left[\prod_{i=1}^{n-1} a\right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a\right] g(r) \\
&= \left[a^{n-1}\right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1}\left[a^{n-r-1}\right] g(r) = \left[2^{n-1}\right] 0,5 + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{n-r-1}3^r \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^r = 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}}\right)\right] \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)\right] = 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3+3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3+2\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right] = 2^{n-2} - 3\cdot 2^{n-1} + 2^n\left(\frac{3}{2}\right)^n \\
&= 2^{n-2} - 6\cdot 2^{n-2} + 3^n = 3^n - 5\cdot 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

□

**Příklad 11.** *Pacient užívá lék vždy po čtyřech hodinách. Nechť $D(n)$ je množství účinné látky v krevním systému v $n$-tém intervalu. Tělo během každého intervalu eliminuje $p$-tinu účinné látky. Nalezněte $D(n)$ a $\lim_{n\to\infty} D(n)$, jestliže užívaná dávka je $D_0$.*

*Řešení.* Nejprve musíme převést slovní zadání do rovnice, kterou potom vyřešíme. Zřejmě

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

S využitím (24) dostáváme

$$D(n) = \left[D_0 - \frac{D_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{D_0}{p},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}. \tag{25}$$

Nechť $D_0 = 2\,[cm^3]$ a $p = 0,25$, potom původní rovnice je

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2, \quad D_0 = 2.$$

Tabulka 1 obsahuje hodnoty $D(n)$ pro $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D(n)$ | 2 | 3.5 | 4.62 | 5.47 | 6.1 | 6.58 | 6.93 | 7.2 | 7.4 | 7.55 | 7.66 |

Tabulka 1: Hodnoty $D(n)$

Z (25) zjistíme, že rovnovážným stavem množství účinné látky v těle je

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D(n) = 8\left[cm^3\right].$$

□

**Příklad 12** (Umořování). *Umořování je proces, při kterém je splácen dluh (ne)pravidelnými platbami v pravidelných intervalech. Každá splátka se skládá z úroku za příslušné období a z částky snižující dluh (úmoru).*

*Nechť do každého období vstupujeme s dluhem $p(n)$, který je v tomto období úročen s úrokovou mírou $r$, vztaženou k platební periodě. Na konci $n$-tého období je realizována splátka $g(n)$.*

*Formulace našeho modelu je založena na faktu, že dluh $p(n+1)$ na počátku $(n+1)$-ho období je roven předchozí hodnotě dluhu $p(n)$, k níž musíme přičíst úrok za poslední období, $rp(n)$ a naopak odečíst splátku $g(n)$. Tedy*

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n) = (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0,$$

*kde $p_0$ značí počáteční hodnotu dluhu. Jde o případ s konstantním koeficientem u $p(n)$, takže můžeme využít (22)*

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k).$$

*Ve speciálním případu může jít o úlohu s konstantní splátkou ($g(n)$ je konstantní) nebo s konstantním úmorem ($p(n+1) - p(n)$ je konstantní. Úloha na výpočet pevného počtu $n$ konstantních splátek $T$ nás vede k rovnici $p(n) = 0$, konkrétně*

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} T = (1+r)^n p_0 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} T = 0.$$

*Odtud*

$$T = p_0 \left[ \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \right].$$

*Pro $p_0 = 100\,000$, $r = 0,1$ a $n = 5$ dostaneme*

$$T = 100\,000 \left[ \frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-5}} \right] \approx 26\,380.$$

*Umořovací plán naleznete v tabulce 2.*

| $k$ | Dluh $p(k)$ | Splátka $g(k)$ | Úrok $rp(k)$ | Úmor $g(k) - rp(k)$ | Nový dluh $p(k+1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 000 | 26 380 | 10 000 | 16 380 | 83 620 |
| 1 | 83 620 | 26 380 | 8 362 | 18 018 | 65 602 |
| 2 | 65 602 | 26 380 | 6 560 | 19 820 | 45 782 |
| 3 | 45 782 | 26 380 | 4 578 | 21 802 | 23 980 |
| 4 | 23 980 | 26 380 | 2 398 | 23 982 | 0 |
| 5 | 0 | | | | |

Tabulka 2: Umořovací plán

## Cvičení 7.1 a 7.2

1. Nalezněte řešení následujících diferenčních rovnic:
   (a) $x(n+1) - (n+1)x(n) = 0$, $x(0) = c$.
   (b) $x(n+1) - 3^n x(n) = 0$, $x(0) = c$.
   (c) $x(n+1) - e^{2n} x(n) = 0$, $x(0) = c$.
   (d) $x(n+1) - \frac{n}{n+1} x(n) = 0$, $n \geq 1$, $x(1) = c$.
2. Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:
   (a) $y(n+1) - \frac{1}{2} y(n) = 2$, $y(0) = c$.
   (b) $y(n+1) - \frac{n}{n+1} y(n) = 4$, $y(0) = c$.
3. Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:
   (a) $y(n+1) - (n+1)y(n) = 2^n (n+1)!$, $y(0) = c$.
   (b) $y(n+1) = y(n) + e^n$, $y(0) = c$.
4. (a) Napište diferenční rovnici popisující počet oblastí vytvořených $n$ přímkami v rovině, jestliže se každé dvě protnou, a to nejvýše dvě v jednom bodu.
   (b) Nalezněte zmíněný počet oblastí vyřešením nalezené diferenční rovnice.
5. Gama funkce je definována jako $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, $x > 0$.
   (a) Ukažte, že $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$.
   (b) Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!$.
   (c) Ukažte, že $x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$.
6. Prostor (3D) je rozdělen $n$ rovinami, ze kterých žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné čtyři nemají společný bod.
   (a) Napište diferenční rovnici popisující počet vytvořených oblastí.
   (b) Nalezněte počet těchto oblastí.
7. Ověřte (22).
8. Ověřte (24).
9. Dluh \$12.000 má být umořen stejnými splátkami o velikosti \$380 na konci každého měsíce, plus poslední splátkou, která může být menší. Sestavte splátkový kalendář při roční úrokové míře 12% s měsíčním připisováním úroků.
10. Uvažujte půjčku ve výši \$80.000, která má být splacena stejnými měsíčními splátkami. Nalezněte výši této splátky, jestliže roční úroková míra je 10%, připisování úroků je měsíční a doba splácení je 30 let.
11. Uvažujme, že na konci každé periody uložíme sumu $T$do banky, která ji úročí s úrokovou mírou $r$ vztaženou k dané periodě. Nechť $A(n)$ značí naspořenou částku po $n$ periodách.

(a) Napište diferenční rovnici, která popisuje $A(n)$.

(b) Tuto diferenční rovnici vyřešte pro $A(0) = 0$, $T = \$200$ a $r = 0,008$.

12. Bylo zjištěno, že teplota tělesa je 110°F. Dále bylo vypozorováno, že vždy po dvou hodinách je změna teploty tělesa dána jako $-0,3$ násobek rozdílu předchozí teploty tělesa a teploty v místnosti, která je stále 70°F.

    (a) Napište diferenční rovnici, která popisuje teplotu $T(n)$ tělesa na konci $n$-té periody.

    (b) Nalezněte $T(n)$.

13. Uvažujete o hypotéce na 30 let při roční úrokové míře 8%. Kolik si můžete dovolit půjčit, jestliže jste schopni splácet \$1.000 měsíčně?

14. Radium se rozpadá v míře $0,04\%$ ročně. Jaký je jeho poločas rozpadu?

15. (Určování stáří uhlíkovou metodou) Je známo, že obsah uhlíku $C_{14}$ v rostlinách a tělech živočichů je v době jejich života stejný jako v atmosféře. Po jejich úmrtí obsah uhlíku $C_{14}$ v jejich tkáních klesá s mírou $r$.

    (a) Nalezněte $r$, jestliže poločas rozpadu uhlíku $C_{14}$ je 5.700 let.

    (b) Jak stará je zkoumaná zvířecí kost, jestliže v ní zůstalo 70% původního množství uhlíku $C_{14}$?

# KMA/M3: Přednáška č. 11

## 8 Lineární diferenční rovnice vyššího řádu

V této kapitole se budeme věnovat lineárním diferenčním rovnicím vyšších řádů s jednou nezávislou proměnnou. Využití takovýchto rovnic je velmi široké, od populačních dynamik (studium jednoho druhu), přes ekonomii (studium jedné komodity) až k fyzice.

### 8.1 Diferenční počet

Diferenční počet je diskrétní analogii známého diferenciálního a integrálního počtu. Uvedeme některé základní vlastnosti dvou operátorů, které jsou podstatné při studiu diferenčních rovnic.

*Diferenční operátor*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

a *šift operátor*

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Zatímco vztah pro $E^k x(n)$ je jasný,

$$E^k x(n) = x(n+k),$$

pro $\Delta^k x(n)$ to již tak zřejmé není. Vypomůžeme si následujícím přepisem našich operátorů,

$$\Delta = E - I, \quad E = \Delta + I,$$

kde $I$ je operátor identity, tj. $Ix = x$.

Nyní, s využitím binomického rozvoje, dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta^k x(n) &= (E-I)^k x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i). \end{aligned} \tag{26}$$

Podobně můžeme dostat

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n). \tag{27}$$

Operátor $\Delta$ je protějškem operátoru derivování $D$ v diferenciálním počtu. Oba operátory, $\Delta$ i $E$, jsou lineární:

$$\Delta\big[ax(n) + by(n)\big] = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$$

a

$$E\big[ax(n) + by(n)\big] = aEx(n) + bEy(n),$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Důkaz na vás čeká ve cvičení.

Uveďme si další důležité vlastnosti[7] (jejich důkaz je opět ponechán na cvičení):

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0); \tag{28}$$

$$\Delta \left( \sum_{k=n_0}^{n-1} x(k) \right) = x(n). \tag{29}$$

Nyní si uvedeme třetí vlastnost operátoru $\Delta$. Uvidíme, že ji má opět i operátor $D$.

Nechť

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$$

je polynom $k$-tého stupně. Potom

$$\begin{aligned} \Delta p(n) &= \left[a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \cdots + a_k\right] \\ &\quad -\left[a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k\right] \\ &= a_0 k n^{k-1} + \text{ členy stupně nižšího než } (k-1). \end{aligned}$$

Podobně lze ukázat, že

$$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1) n^{k-2} + \text{ členy stupně nižšího než } (k-2).$$

Je zřejmé, že tento proces nás dovede ke vztahu

$$\Delta^k p(n) = a_0 k!, \tag{30}$$

a tedy

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \text{ pro } i \geq 1. \tag{31}$$

## 8.2 Obecná teorie lineárních diferenčních rovnic

Normální tvar *nehomogenní lineární diferenční rovnice $k$-tého řádu* je následující:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{32}$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

$g(n) \equiv 0$ — homogenní rovnice.

Při $n = 0$ můžeme rovnici (32) přepsat

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - \cdots - p_k(0)y(0) + g(0).$$

Takto máme vyjádřeno $y(k)$ a pro $n = 1$ dostaneme

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - \cdots - p_k(1)y(1) + g(1).$$

Opakováním tohoto postupu můžeme vypočíst všechna $y(n)$ pro $n \geq k$. Toto ilustruje následující příklad.

---

[7]Můžeme nahlédnout, že se jedná o analogie vztahů $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$ a $d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ z diferenciálního počtu.

**Příklad 13.** *Uvažujme diferenční rovnici třetího řádu*

$$y(n+3) - \frac{n}{n+1}y(n+2) + ny(n+1) - 3y(n) = n, \tag{33}$$

*kde* $y(1) = 0$, $y(2) = -1$ *a* $y(3) = 1$. *Nalezněme hodnoty* $y(4)$, $y(5)$,$y(6)$ *a* $y(7)$.

*Řešení.* Rovnici přepíšeme do výhodnějšího tvaru

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n. \tag{34}$$

Nyní pro $n = 1$ a po dosazení za $y(1)$, $y(2)$ a $y(3)$ dostáváme

$$y(4) = \frac{1}{2}y(3) - 1y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{1}{2}1 - 1(-1) + 3 \cdot 0 + 1 = \frac{5}{2}.$$

Podobně pro $n = 2$

$$y(5) = \frac{2}{3}y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 = -\frac{4}{3}.$$

Pro $n = 3$

$$y(6) = \frac{3}{4}y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 = -\frac{5}{2}.$$

Pro $n = 4$

$$y(7) = \frac{4}{5}y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 = \frac{89}{6}.$$

□

Řekneme, že posloupnost $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ nebo jednoduše $y(n)$ je *řešením* (32), jestliže tuto rovnici splňuje (pro všechna $n \geq n_0$).

Příslučná počáteční úloha:

$$\begin{aligned} y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) &= g(n), & (35)\\ y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \ldots, y(n_0+k-1) &= a_{k-1}, & (36) \end{aligned}$$

kde $a_i$ jsou reálná čísla.

**Věta 10.** *Počáteční úloha (35) a (36) má právě jedno řešení* $y(n)$.

*Důkaz.* Důkaz vychází z postupného výpočtu jako v příkladu 13. Postupně pro $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ dostaneme posloupnost $\{y(n)\}_{n=n_0+k}^{\infty}$, což nám ve spojení s počátečními podmínkami (36) dává celé řešení $\{y(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$. Z postupu vyplývá i jednoznačnost. □

Iterativně tedy řešení počáteční úlohy můžeme získat vždy, se ziskem explicitního tvaru řešení (např. $y(n) = 2ny(n_0)$) je to obecně mnohem složitější. Proto se později omezíme na úlohy s konstantními koeficienty $p_i$.

V dalším podrobně prostudujeme homogenní část lineární diferenční rovnice $k$-tého řádu, tedy

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \tag{37}$$

Uvedeme tři důležité definice.

**Definice 8.1.** *Řekneme, že funkce* $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ *jsou* lineárně závislé *pro* $n \geq n_0$, *jestliže existují konstanty* $a_1, a_2, \dots, a_r$ *ne všechny nulové a takové, že*

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže například $a_j \neq 0$, potom vydělením předchozí rovnosti zjistíme, že $f_j(x)$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních funkcí,

$$f_j(n) \;=\; -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \tag{38}$$

Pro dvojici funkcí ($r = 2$) to znamená, že jedna je násobkem druhé, $f_1(n) = a f_2(n)$, $a \neq 0$.

Opakem lineární závislodsti je *lineární nezávislost*:

$$\big(a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0,\ n \geq n_0\big) \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0.$$

**Příklad 14.** *Ukažte, že funkce* $3^n$, $n3^n$, *a* $n^2 3^n$ *jsou lineárně nezávislé pro* $n \geq 0$.

Řešení *Rovnici*

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \quad n \geq 0$$

*podělíme* $3^n$ *a dostaneme*

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 0,$$

*a tedy* $a_1 = 0$. *Rovnici*

$$a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 0$$

*podělíme* $n$ *a dostaneme*

$$a_2 + a_3 n = 0, \quad n \geq 0,$$

*a tedy již vidíme, že nutně také* $a_2 = a_3 = 0$.

**Definice 8.2.** *Množinu k lineárně nezávislých řešení (37) nazýváme* fundamentální množina *řešení.*

V předchozím příkladu jsme si mohli uvědomit, že ověření lineární nezávislosti jen podle definice nemusí být vždy snadné. Naštěstí existuje jednodušší metoda založená na tzv. casoratiánu[8]:

**Definice 8.3.** *Casoratián* $W(n)$ *řešení* $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ *je dán předpisem*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & & & \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

**Příklad 15.** *Uvažujte diferenční rovnici*

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

(a) *Ukažte, že posloupnosti* $1$, $(-3)^n$ *a* $2^n$ *jsou její řešení.*

[8] Diskrétní obdoba wronskiánu u diferenciálních rovnic.

*(b) Nalezněte casoratián posloupností z bodu (a).*

Řešení

*ad (a) Stačí dosadit.*

*ad (b)*

$$\begin{aligned} W(n) &= \det\begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} - (-3)^n\begin{vmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{vmatrix} + 2^n\begin{vmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ &= -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n. \end{aligned}$$

Dá se ukázat, že množina $k$ řešení je fundamentální (tj. lineárně nezávislá), jestliže její casoratián $W(n)$ není nikdy nulový ($n \geq n_0$). To znamená, že v předchozím příkladu, kde $W(n) = -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n$, o fundamentální množinu jde. Obecně ale nemusí být snadné vypočíst a vyhodnotit casoratián pro každé $n \geq n_0$. Naštěstí lze vyjádřit $W(n)$ jako součin pomocí $W(n_0)$, což nás vede k následujícímu závěru:

**Důsledek 1.** *Předpokládejme, že $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$. Potom je casoratián $W(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$ právě když $W(n_0) \neq 0$.*

**Věta 11.** *Množina řešení $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ rovnice (37) je fundamentální tehdy a jen tehdy, jestliže pro nějaké $n_0 \geq 0$ platí $W(n_0) \neq 0$.*

**Příklad 16.** *Ověřte, že $\{n, 2^n\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice*

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n+1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0.$$

Řešení *Nejprve je samozřejmě třeba dosadit ověřovaná řešení do rovnice.*

*Casoratián:*

$$W(n) = \det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

*Podle věty 11 stačí nalézt jednu hodnotu $n_0$, pro kterou $W(n_0) \neq 0$. Nejjednodušší bude vzít $n_0 = 0$, a tedy*

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

*Podle věty 11 jsou řešení $n, 2^n$ lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální množinu řešení.*

**Příklad 17.** *Uvažujte diferenční rovnici třetího řádu*

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

*Ukažte, že funkce $2^n$, $(-2)^n$ a $(-3)^n$ tvoří její fundamentální množinu řešení.*

**Věta 12** (O existenci fundamentální množiny řešení homogenní úlohy)**.** *Jestliže* $p_k(n) \neq 0$ *pro všechna* $n \geq n_0$*, potom (37) má fundamentální množinu řešení pro* $n \geq n_0$*.*

Ukažte, že lineární kombinace řešení homogenní úlohy (37) je také řešením (37). Tento fakt nás vede k následující definici obecného řešení.

**Definice 8.4** (Obecné řešení homogenní úlohy)**.** *Nechť* $\{x_1(n), x_2/n), \ldots, x_k(n)\}$ *je fundamentální množina řešení (37).*

*Potom* obecné řešení *(37) je dáno vztahem*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Každé řešení (37) lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů $a_i$.

## Cvičení 8.2

1. Najděte casoratián následujících funkcí a zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

   (a) $5^n, 3 \cdot 5^{n+2}, e^n$.

   (b) $5^n, n \cdot 5^n, n^2 \cdot 5^n$.

   (c) $(-2)^n, 2^n, 3$.

   (d) $0, 3^n, 7^n$.

2. Pro následující diferenční rovnice a jejich řešení

   (i) určete, zda jsou řešení lineárně nezávislá a

   (ii) nalezněte, pokud to půjde (použijte pouze daná řešení), obecná řešení.

   (a) $x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 0;\ 1, n, n^2$.

   (b) $x(n+2) + x(n) = 0;\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   (c) $x(n+3) + x(n+2) - 8x(n+1) - 12x(n) = 0;\ 3^n, (-2)^n, (-2)^{n+3}$.

   (d) $x(n+4) - 16x(n) = 0;\ 2^n, n2^n, n^2 2^n$.

## 8.3 Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme diferenční rovnici $k$-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{40}$$

kde $p_i$ jsou konstanty a $p_k \neq 0$. Chceme pro ni nalézt fundamentální množinu řešení a potažmo i obecné řešení.

Postup bude poměrně jednoduchý. Budeme předpokládat, že řešení (40) mají tvar $\lambda^n$, kde $\lambda$ je komplexní číslo. Dosadíme do (40) a dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + \lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0. \tag{41}$$

Její kořeny nazýváme *charakteristické kořeny*. Poznamenejme, že zřejmě žádný z nich není nulový, neboť $p_k \neq 0$.

Mohou nastat dva základní případy:

(a) *Charakteristické kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různé.* Dokážeme, že v tomto případě funkce $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n$ tvoří fundamentální množinu řešení (40). Postačí ukázat, že $W(0) \neq 0$.

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Tento determinant se nazývá Vandermodův a dá se ukázat (pokuste se), že

$$W(0) = \prod_{1 \leq j \leq k} (\lambda_j - \lambda_k),$$

takže $W(0) \neq 0$ a $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ je opravdu fundamentální množinou řešení (40).

Obecné řešení (40) má tedy tvar

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

(b) *Násobné charakteristické kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$* s odpovídajícími násobnostmi $m_1, m_2, \ldots, m_r$. V tomto případě můžeme (40) zapsat jako

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) = 0, \tag{40'}$$

Zde je důležité, že řešení $\psi_1(n), \psi_2(n), \ldots, \psi_{m_i}(n)$ rovnice

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$$

jsou zároveň řešeními rovnice (40').

**Lemma 1.** *Množina*

$$G_i = \left\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\right\}$$

*je fundamentální množinou řešení rovnice $(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$.*

**Důsledek 2.** *Množina*

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$$

*je fundamentální množinou řešení (40').*

**Důsledek 3.** *Obecné řešení (40') je dáno vztahem*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \big(a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{im_i-1}n^{m_i-1}\big).$$

**Příklad 18.** *Řešte rovnici*

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0,$$
$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 1.$$

Řešení *Charakteristická rovnice:*

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

*Charakteristické kořeny:*

$$\lambda_1 = 2 = \lambda_2, \lambda_3 = 3,$$

*tedy násobné.*

*Obecné řešení:*

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n.$$

*Po dosazení počátečních podmínek dostaneme*

$$a_0 = 3, a_1 = 2, b_1 = -3,$$

*a tedy řešením počáteční úlohy je*

$$x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n2^n - 3^{n+1}.$$

**Příklad 19** (Komplexní charakteristické kořeny)**.** *Předpokládejme, že rovnice*

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0$$

*má komplexní charakteristické kořeny*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

*Její obecné řešení by tedy mělo tvar*

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

*Zopakujme si, že bod* $(\alpha, \beta)$ *v komplexní rovině odpovídá komplexnímu bodu* $\alpha + i\beta$. *V polárních souřadnicích:*

$$\alpha = r\cos\theta, \quad \beta = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

*Dá se ukázat, že*

$$x_1(n) = r^n \cos(n\theta) \quad a \quad x_2(n) = r^n \sin(n\theta)$$

*jsou dvě lineárně nezávislá řešení.*

*Například rovnice*

$$(E^2 + 1)x(n) = 0 \tag{44}$$

*má dva komplexně sdružené charakteristické kořeny*

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

*Tudíž*

$$\alpha = 0, \beta = \pm 1, r = 1, \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

*a tedy budeme ověřovat, že*

$$x_1(n) = 1^n \cos(n\frac{\pi}{2}) \quad a \quad x_2(n) = 1^n \sin(n\frac{\pi}{2})$$

*jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice 44.*

Řešení: $(E^2 + 1)x_1(n) = x_1(n+2) + x_1(n) = \cos\big((n+2)\frac{\pi}{2}\big) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = \cos\big(n\frac{\pi}{2} + \pi\big) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = -\cos(n\frac{\pi}{2}) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = 0$. *Obdobně i pro* $x_2(n) = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

Nezávislost: *casoratián pro* $n = 0$

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{2}) & \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ \cos((n+1)\frac{\pi}{2}) & \sin((n+1)\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \cdots = 1 \neq 0.$$

**Příklad 20** (Fibonacciho posloupnost (Králičí problém))**.** *Králíci se množí, každý pár vrhne na konci každého měsíce (kromě prvního) svého života další pár. Množství párů králíků na konci n-tého měsíce označíme* $F(n)$. *Rozdělme si tyto páry na nedospělé (na konci následujícího měsíce ještě nevrhnou, ale stanou se dospělými) a dospělé:*

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n).$$

*Na konci následujícího měsíce tedy $F_1(n)$ párů vrhne další pár a $F_0(n)$ párů dospěje (žádný králík neumírá ani neztrácí plodnost), což můžeme zapsat následovně:*

$$\begin{aligned} F_0(n+1) &= F_1(n), \\ F_1(n+1) &= F_1(n) + F_0(n) = F(n), \\ F(n+1) &= F_0(n+1) + F_1(n+1) = F_1(n) + F(n). \end{aligned}$$

*Podobně i v následujícím měsíci:*

$$\begin{aligned} F_0(n+2) &= F_1(n+1) = F(n), \\ F_1(n+2) &= F_1(n+1) + F_0(n+1) = F(n+1), \\ F(n+2) &= F_0(n+2) + F_1(n+2) = F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

*Dostali jsme tedy (Fibonacciho) diferenční rovnici druhého řádu*

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1).$$

*Její chrakteristická rovnice*

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

*má dva kořeny*

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad a \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

*Obecné řešení:*

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

*Uvažujme množení od jediného páru, který je sám vržen na konci prvního měsíce. Tomu odpovídají počáteční hodnoty $F(1) = 1$ a $F(2) = 1$. Po dosazení dostaneme*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

*Následně:*

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^n - \beta^n\right). \tag{45}$$

*Zajímavé je, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv 1,618,$$

*což je tzv.* zlatý poměr.

## Cvičení 8.3

V následujících cvičeních najděte obecné řešení uvedených diferenčních rovnic.

Připomeňme, že $E$ je tzv. šift-operátor: $Ex(n) = x(n+1)$, $E^k x(n) = x(n+k)$. Zápis $(E-2)^2 x(n) = (E^2 - 4E + 4)x(n) = x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n)$ nám umožňuje zapsat diferenční rovnici způsobem, který připomíná zápis polynomu ve tvaru součinu kořenových činitelů, takže okamžitě vidíme, jaké má diferenční rovnice charakteristické kořeny (zde $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$).

1. $x(n+2) - 16x(n) = 0$.
2. $x(n+2) + 16x(n) = 0$.
3. $(E-3)^2(E^2+4)x(n) = 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$).
4. $\Delta^3 x(n) = 0$.
5. $(E^2+2)^2 x(n)$.
6. $x(n+2) - 6x(n+1) + 14x(n) = 0$.

# KMA/M3: Přednáška č. 12

## 8.3 Lineární nehomogenní rovnice: metoda neurčitých koeficientů

V posledních dvou oddílech jsme se věnovali teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic. V případě rovnic s konstantními koeficienty umíme najít jejich řešení. Zde se vrátíme k nehomogenním lineárním diferenčním rovnicím $k$-tého řádu,

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{46}$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

Na tuto rovnici můžeme pohlížet tak, že levá strana popisuje nějaký fyzikální systém a $g(n)$ se bere jako vnější činitel, přičemž studujeme, jakým způsobem $y(n)$ (výstup) reaguje na $g(n)$ (vstup).

Než přejdeme k obecným výsledkům, položme si otázku, zda množina řešení nehomogenní úlohy tvoří vektorový prostor. Jinými slovy, je lineární kombinace dvou řešení opět řešením? Odpovíme si pomocí následujícího příkladu.

**Příklad 21.** *Uvažujme rovnici*

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n.$$

*(a) Ukažte, že $y_1 = n \cdot 3^{n-1}$ a $y_2 = (1+n)3^{n-1}$ jsou řešeními naší rovnice.*

*(b) Ukažte, že $y(n) = y_2(n) - y_1(n)$ není řešením.*

*(c) Ukažte, že $\varphi(n) = cn3^{n-1}$, $c \in \mathbb{R}$, není řešením.*

Řešení

*ad (a) Proveďte sami.*

*ad (b)* $y(n) = y_2(n) - y_1(n) = n \cdot 3^{n-1} - (1+n)3^{n-1} = 3^{n-1}$. *Dosazením do rovnice obdržíme*

$$3^{n+1} - 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} = 3^n[3-1-2] = 0 \neq 5 \cdot 3^n.$$

*ad (c) Zde opět pomocí dosazení zjistíme, že $\varphi(n)$ není řešením.*

Závěr

*(i) Z příkladu je zřejmé, že řešení nehomogenní (na rozdíl od homogenní) úlohy netvoří vektorový prostor. Ani součet, ani násobek řešení není dalším řešením.*

*(ii) Bod (b) poukazuje na obecnou vlastnost řešení nehomogenní úlohy, jmenovitě je rozdíl dvou řešení řešením homogenní úlohy. Tento závěr je formulován v následující větě.*

**Věta 13.** *Jestliže $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou řešeními nehomogenní úlohy (46), potom jejich rozdíl, $x(n) = y_1(n) - y_2(n)$, je řešením odpovídající homogenní úlohy*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \tag{47}$$

*Důkaz.* Proveďte sami. □

V dalším budeme používat následující označení. Obecné řešení homogenní úlohy budeme nazývat *komplementární* a značit $y_c(n)$, zatímco řešení nehomogenní úlohy budeme nazývat *partikulární* a značit $y_p(n)$. Následující výsledek ukazuje, jakým způsobem můžeme najít všechna řešení nehomogenní úlohy při znalosti jednoho partikulárního řešení.

**Věta 14.** *Libovolné řešení $y(n)$ nehomogenní úlohy (46) lze zapsat jako*

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

*kde $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ je fundamentální množina řešení homogenní úlohy (47).*

*Důkaz.* Z věty 13 víme, že rozdíl dvou partikulárních řešení je řešením homogenní úlohy, a tedy musí platit, že

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

pro nějaké konstanty $a_i$. □

Nyní tedy víme, že obecné řešení nehomogenní úlohy lze zapsat jako

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n). \tag{48}$$

Nyní obrátíme pozornost na hledání partikulárního řešení nehomogenní úlohy s konstantními koeficienty,

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = g(n). \tag{49}$$

Použijeme metodu *neurčitých koeficientů.* Tato metoda je postavena na inteligentním odhadu tvaru partikulárního řešení. Tento (trochu neurčitý) tvar dosadíme do rovnice a dohledáme (zatím neurčité) koeficienty. Pro úplně obecné $g(n)$ tato metoda není efektivní, ale ukážeme, že lze definovat pravidla postupu ve speciálním případě, kdy $g(n)$ je lineární kombinací členů

$$a^n, \quad \sin(bn), \quad \cos(bn) \quad \text{a} \quad n^k, \tag{50}$$

nebo jejich součinů, jako jsou například

$$a^n \sin(bn), \quad a^n n^k, \quad a^n n^k \cos(bn), \ldots. \tag{51}$$

K formulaci neurčitého tvaru partikulárního řešení využijeme tabulku 3

Při známém tvaru obecného řešení homogenní úlohy musíme uvažovat dva oddělené případy:

| $g(n)$ | $y_p(n)$ |
|---|---|
| $a^n$ | $ca^n$ |
| $n^k$ | $c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k$ |
| $n^k a^n$ | $c_0 a^n + c_1 n a^n + \cdots + c_k n^k a^n$ |
| $\sin(bn), \cos(bn)$ | $c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$ |
| $a^n \sin(bn), a^n \cos(bn)$ | $\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$ |
| $a^n n^k \sin(bn), a^n n^k \cos(bn)$ | $(c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k) a^n \sin(bn)$ $+(d_0 + d_1 n + \cdots + d_k n^k) a^n \cos(bn)$ |

Tabulka 3: Partikulární řešení $y_p(n)$.

1. V neurčitém tvaru partikulárního řešení se nevyskytují funkce fundamentální množiny řešení homogenní úlohy. V tomto případě $y_p(n)$ z tabulky 3 dosadíme zpět do (49) a najdeme hodnoty koeficientů.

2. Pokud se v neurčitém tvaru partikulárního řešení vyskytuje funkce fundamentální množiny řešení homogenní úlohy, potom ji násobíme dostatečně vysokou mocninou $n$ a opět dosadíme zpět do (49) a najdeme hodnoty koeficientů.

| $y_c$ | $y_p$ z tabulky | $y_p$ upravené |
|---|---|---|
| $3^n$ | $3^n$ | $n3^n$ |
| $3^n + n3^n$ | $n^2 3^n$ | |
| $a^n \cos(bn)$ | $\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$ | $n\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$ |
| $a^n$ | $\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$ | $\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$ |

**Příklad 22.** *Řešte diferenční rovnici*

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n2^n. \tag{52}$$

Řešení *Charakteristické kořeny homogenní rovnice jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$, a tedy obecné řešení homogenní úlohy je*

$$y_c(n) = c_1 3^n + c_2 (-4)^n.$$

*Podle tabulky bude mít partikulární řešení tvar*

$$y_p(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n,$$

*Neobsahuje prvky fundamentální množiny řešení homogenní úlohy, takže můžeme přímo dosadit zpět do (52) a dostaneme*

$$\begin{aligned} a_1 2^{n+2} + a_2(n+2)2^{n+2} + a_1 2^{n+1} + a_2(n+1)2^{n+1} - 12a_1 2^n - 12a_2 n 2^n &= n2^n, \\ (10a_2 - 6a_1)2^n - 6a_2 n 2^n &= n2^n. \end{aligned}$$

*Tudíž*

$$10a_2 - 6a_1 = 0, \quad a \quad 6a_2 = 1,$$

*tedy*

$$a_1 = \frac{-5}{18}, \quad a_2 = \frac{-1}{6}.$$

*Partikulární řešení*

$$y_p(n) = \frac{-5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n,$$

*a obecné řešení*

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n) = \frac{-5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n + c_1 3^n + c_2(-4)^n.$$

**Příklad 23.** *Řešte diferenční rovnici*

$$(E-3)(E+2)y(n) = 5 \cdot 3^n. \tag{53}$$

Řešení *Obecné řešení homogenní rovnice* $(E-3)(E+2)y(n) = 0$ *je*

$$y_c(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n.$$

*Tabulkový tvar partikulárního řešení*

$$y_p(n) = c3^n$$

*obsahuje prvek* ($3^n$) *fundamentální množiny řešení homogenní úlohy, takže upravíme na*

$$y_p(n) = cn3^n.$$

*Dosadíme do původní rovnice (53) a dostaneme*

$$c(n+2)3^{n+2} - c(n+1)3^{n+1} + 6cn3^n = 5 \cdot 3^n,$$

*a tedy*

$$c = \frac{1}{3},$$

*čímž* $y_p(n) = n3^{n-1}$ *a obecné řešení (53) je*

$$y(n) = n3^{n-1} + c_1 3^n + c_2(-2)^n$$

**Příklad 24.** *Řešte diferenční rovnici*

$$y(n+2) + 4y(n) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{54}$$

Řešení *Charakteristická rovnice a kořeny homogenní úlohy:*

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$$

*Po převodu na polární souřadnice,* $r = 2$, $\theta = \pi/2$, *podle příkladu 19 dostaneme*

$$y_c(n) = 2^n\left(c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

*Všimněte si, že člen* $2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ *se objevuje v* $y_c(n)$, *takže základní tvar* $y_p(n)$ *z tabulky 3 pro* $g(n) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ *rozšíříme o* $n$:

$$y_p(n) = 2^n\left(an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right). \tag{55}$$

*Dosadíme z (55) do (54) a dostaneme*

$$2^{n+2}\left[a(n+2)\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)+b(n+2)\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)\right]$$
$$+4\cdot 2^n\left[an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]=8\cdot 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

*Odtud s úpravami* $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)=-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ *a* $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)=-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ *dostaneme*

$$4\cdot 2^n\left[-a(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-b(n+2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$
$$+4\cdot 2^n\left[an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]=8\cdot 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

*což vede k*

$$8\cdot 2^n\left[-a\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-b\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]=8\cdot 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

*a tedy porovnáním koeficientů u* cos *a* sin *zjistíme, že* $a=-1$ *a* $b=0$. *Dosadíme zpět do (55):*

$$y_p(n)=-2^n n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

*Celkové obecné řešení nehomogenní úlohy (54):*

$$y(n)=2^n\left(c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

## Cvičení 8.3

Pro úlohy 1–6 nalezněte partikulární řešení.

1. $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=1+n$.
2. $y(n+2)+8y(n+1)+12y(n)=e^n$.
3. $y(n+2)-5y(n+1)+4y(n)=4^n-n^2$.
4. $y(n+2)+8y(n+1)+7y(n)=ne^n$.
5. $y(n+2)-y(n)=n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
6. $(E^2+9)^2y(n)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Pro úlohy 7–9 nalezněte řešení diferenční rovnice.

7. $\Delta^2y(n)=16$, $y(0)=2$, $y(1)=3$.
8. $\Delta^2y(n)+7y(n)=2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $y(0)=0$, $y(1)=1$.
9. $(E-3)(E^2+1)y(n)=3^n$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y(2)=3$.

Pro úlohy 10 a 11 nalezněte obecné řešení diferenční rovnice.

10. $y(n+2)-y(n)=n2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
11. $y(n+2)+8y(n+1)+7y(n)=n2^n$.