Cvičení z ODR

Separace proměnných

Úloha 0.1. *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $yy' = \dfrac{1-2t}{y}$.

Řešení.

$y \cdot y' = \dfrac{1-2t}{y} \quad | : y \neq 0 \leftarrow$ definiční obor

$y' = \dfrac{1-2t}{y^2}$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1-2t}{y^2} \quad | \cdot y^2, \cdot dt$

$y^2 \cdot dy = (1-2t)\,dt$

$\int y^2\,dy = \int (1-2t)\,dt$

$\frac{1}{3}y^3 = t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$y^3 = 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}}$

□

1 Substituce a) (lineární výraz)

Úloha 1.1. *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $y' = (4y - t)^2$.

Řešení.

$y' = (4y - t)^2$ (lineární výraz)

Substituce: $z = 4y - t$

$z' = 4y' - 1$

$y' = \frac{z' + 1}{4}$

Dosadíme: $\frac{z'+1}{4} = z^2$, $z' = 4z^2 - 1$,

$\frac{dz}{dt} = 4z^2 - 1 \quad | : (4z^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{z \neq \pm\frac{1}{2}}$

$z \equiv \frac{1}{2}$: $L = z' = 0$, $P = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$ je řešením

$z \equiv -\frac{1}{2}$: $L = z' = 0$, $P = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$ je také řešením

$\frac{dz}{4z^2 - 1} = dt$, $\int \frac{dz}{4z^2 - 1} = \int dt$,

$-\frac{1}{2}\int \frac{dz}{2z+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{2z-1} = \int dt$

$-\frac{1}{4}\ln|2z+1| + \frac{1}{4}\ln|2z-1| = t + \ln C_1, \quad C_1 > 0$

$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2z-1}{2z+1}\right| = t + \ln C_1$

$$\ln\left|\frac{2z-1}{2z+1}\right| = 4t + \ln C_2, \quad C_2 > 0$$

$$\left|\frac{2z-1}{2z+1}\right| = C_2 \cdot e^{4t}$$

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C_3 e^{4t}, \quad C_3 \neq 0 \quad (C_3 = \pm C_2)$$

Když u C_3 povolíme 0, dostaneme do tohoto zápisu i řešení $z \equiv \frac{1}{2}$ (tedy nula v čitateli na levé straně).

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešení $z \equiv -\frac{1}{2}$ odpovídá nule ve jmenovateli, takže je zapíšeme zvlášť:

$$\left[\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \ C \in \mathbb{R}; \ z \equiv -\frac{1}{2}\right]$$

Návrat před substituci:

$$\left[\frac{8y-2t-1}{8y-2t+1} = C \cdot e^{4t}, \ C \in \mathbb{R}; \ y = \frac{t-\frac{1}{2}}{4}\right]$$

□

2 Substituce b) (homogenní)

Úloha 2.1. *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $y^2\,\mathrm{d}t + (t^2 - ty)\,\mathrm{d}y$.

Řešení.

$y^2\,dt + (t^2 - ty)\,dy = 0 \quad | : dt$

$y^2 + (t^2 - ty)\,\frac{dy}{dt} = 0$

$y' = \frac{-y^2}{t^2 - ty}$

$t^2 - ty \neq 0$

$t(t-y) \neq 0 \Rightarrow t \neq 0,\ y \neq t$

Je homogenní

Případ $y = t$:

$t^2 + (t^2 - t^2)\cdot 1 = t^2 \neq 0$

nejde o řešení DR

$y' = \frac{y^2}{ty - t^2}\ \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$

$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{y}{t}\right) - 1}$

Substituce: $z = \frac{y}{t}$

$zt = y$

$y' = z't + z$

Dosadíme!

$z't + z = \frac{z^2}{z-1}, \quad z't = \frac{z^2}{z-1} - z$

$z't = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1}, \quad z't = \frac{z}{z-1}$

$\frac{dz}{dt}\,t = \frac{z}{z-1} \quad | : t,\ : \frac{z}{z-1},\ \cdot dt$

$t \neq 0$ již máme ↑

$z \neq 0$ Jde o řešení?

$z \equiv 0$: $L = 0 \cdot t = 0$, $P = \frac{0}{0-1} = 0$, $L = P$

Ano, $z \equiv 0$ je řeš. DR. $\Rightarrow y \equiv 0$ je řeš. DR

$C = 0$

$\frac{z-1}{z}\,dz = \frac{dt}{t}$

$\int \frac{z-1}{z}\,dz = \int \frac{dt}{t}$

$(z - \ln|z|) = (\ln|t| + \ln C_1), \quad C_1 > 0$

$e^{(\cdot)} \quad e^{(\cdot)}$

$\frac{e^z}{|z|} = C_1 \cdot |t|, \quad \frac{e^z}{z} = C_2 t, \quad C_2 \neq 0$

Dosadíme: $\frac{e^{\frac{y}{t}}}{\frac{y}{t}} = C_2 t, \quad y = C_3 e^{\frac{y}{t}}, \quad C_3 \neq 0$

$\boxed{y = C e^{\frac{y}{t}},\ C \in \mathbb{R}}$

□

Úloha 2.2. *Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice* $t\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}t = y\,\mathrm{d}y$.

Řešení.

$t\,dy - y\,dt = y\,dy$, $\quad (t-y)\,dy = y\,dt \;/\cdot dt$

$(t-y)\frac{dy}{dt} = y$, $\quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t-y}$ $\quad y \neq t$

$y = t$ není řešením DR

$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{y}{t}}{1-\frac{y}{t}}$ $\quad$ Substituce: $z = \frac{y}{t}$

$y' = z't + z$

$z't + z = \frac{z}{1-z}$, $\quad z't = \frac{z}{1-z} - z$, $\quad z't = \frac{z - z + z^2}{1-z}$

$z't = \frac{z^2}{1-z} \;/\cdot t, \cdot \frac{1-z}{z^2}$ $\quad t \neq 0$ automaticky

$z^2 \neq 0$, $z \neq 0$

$y \equiv 0$ je řeš. DR

$\int \frac{1-z}{z^2}\,dz = \int \frac{dt}{t}$

$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|t| + \ln C_1$, $\quad C_1 > 0$

$\left(\frac{1}{z} + \ln|z|\right) = \left(-\ln|t| + \ln C_2\right)$, $\quad C_2 > 0$

$e^{(\cdot)} = e^{(\cdot)}$

$|z| \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_2 \cdot \frac{1}{|t|}$, $\quad z \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_3 \frac{1}{t}$, $\quad C_3 \neq 0$

zpětné dosazení:

$\frac{y}{t} \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \cdot \frac{1}{t} \;/\cdot t\,(\neq 0)$, $\quad y \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \;/\cdot e^{\frac{t}{y}}\,(\neq 0)$

$C = 0$

$y = C_3 \cdot e^{\frac{y}{t}}$,

$\boxed{y = C \cdot e^{\frac{y}{t}},\ C \in \mathbb{R}}$

□

c) Rovnice typu $y' = f\left(\dfrac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní.

Úloha 2.3 ($\Delta = 0$)**.** *Řešte:* $(t + y + 1)\,\mathrm{d}t + (2t + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$.

Řešení. Upravíme:

$$\begin{aligned} (t + y + 1)\,\mathrm{d}t + (2t + 2y - 1)\,\mathrm{d}y &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{-t - y - 1}{2t + 2y - 1}. \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jde tedy o speciální případ, ve kterém volíme lineární substituci:

$$z = t + y, \quad z' = 1 + y', \quad y' = z' - 1,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - 1 &= -\frac{-z - 1}{2z - 1}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{-z - 1}{2z - 1} + 1, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{-z - 1 + 2z - 1}{2z - 1}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{z - 2}{2z - 1}, \end{aligned}$$

což už je tvar vhodný k separaci... □

Úloha 2.4 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$)**.** *Řešte:* $y' = \dfrac{3t - y}{t + y}$.

Řešení. Vidíme, že speciální případ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ vede na homogenní rovnici:

$$y' = \frac{3t - y}{t + y} \cdot \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}, \quad y' = \frac{3 - \frac{y}{t}}{1 + \frac{y}{t}}.$$

Provedeme tedy substituci $z = \dfrac{y}{t}$, ... □

Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y, tak nezávisle proměnnou t:

$$\begin{aligned} y &= z + r \\ t &= \tau + s. \end{aligned}$$

Koeficienty r, s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynulovaly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ (tedy $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\begin{aligned} \alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení r, s.

Úloha 2.5. *Řešte rovnici* $y' = \dfrac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 5s - 2r - 1 &= 0, \\ 2s - r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7$, $s = 3$. Substituce $y = z + 7$, $t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \qquad \text{neboli} \qquad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\dfrac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \qquad \text{odkud} \qquad u'\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2 - u}{u^2 - 4u + 5}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 4}{u^2 - 4u + 5}\mathrm{d}u = -2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - 4u + 5) = -2\ln|\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde} \quad C_1 > 0,$$

tedy

$$u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \dfrac{z}{\tau}$, $z = y - 7$, $\tau = t - 3$, je $u = \dfrac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2}, \quad \text{kde} \quad C \neq 0.$$

□

Úloha 2.6. *Řešte rovnici* $y' = \dfrac{2t - y + 1}{t - 2y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2s - r + 1 &= 0, \\ s - 2r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; je $r = \frac{1}{3}$, $s = -\frac{1}{3}$. Substituce $y = z + \frac{1}{3}$, $t = \tau - \frac{1}{3}$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{2\tau - z}{\tau - 2z} \qquad \text{neboli} \qquad z' = \frac{2 - \frac{z}{\tau}}{1 - 2\frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\dfrac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{2 - u}{1 - 2u}, \qquad \text{odkud} \qquad u'\tau = 2\frac{u^2 - u + 1}{1 - 2u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{1 - 2u}{u^2 - u + 1}\mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 1}{u^2 - u + 1}\mathrm{d}u = -2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - u + 1) = -2\ln|\tau| + \ln C, \quad \text{kde} \quad C > 0,$$

tedy

$$u^2 - u + 1 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \dfrac{z}{\tau}$, $z = y - \frac{1}{3}$, $\tau = t + \frac{1}{3}$, je $u = \dfrac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}} + 1 = \frac{C}{(t + \frac{1}{3})^2}, \quad \text{kde} \quad C > 0.$$

□

3 Snížení řádu diferenciální rovnice

Úloha 3.1. *Řešte* $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Řešení. Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'' \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Separace proměnných ($z \equiv 0$ je řešením):

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln|z| = \ln|x|, \quad z = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y' = Cx, \quad y = \frac{C}{2}x^2 + C_1,\ C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Řešení ($C_2 = \frac{C}{2}$):

$$y = C_1 + C_2x^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 3.2. *Řešte počáteční úlohu:*

$$y''' = \mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Řešení. Substituce:

$$z = y'', \quad z' = y''', \quad z' = \mathrm{e}^{2x}, \quad z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_4,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y'' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_4.$$

Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'', \quad z' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_4, \quad z = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C_4x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C_4x + C_2, \quad y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{C_4}{2}x^2 + C_2x + C_3,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení ($C_1 = \frac{C_4}{2}$):

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínky:

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + 2C_1x + C_2, \quad y'' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2C_1.$$

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} y(0) & = & 1 & \frac{1}{8}\mathrm{e}^0 + C_1 0 + C_2 0 + C_3 & = & 1 & \frac{1}{8} + C_3 & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 & \frac{1}{4}\mathrm{e}^0 + 2C_1 0 + C_2 & = & -1 & \frac{1}{4} + C_2 & = & -1 \\ y''(0) & = & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 + 2C_1 & = & 0 & \frac{1}{2} + 2C_1 & = & 0 \end{array}$$

Tudíž:

$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Partikulární řešení:

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

□

4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nehomogenní úloha: $y' + p(t)y = q(t)$.
Příslušná homogenní úloha: $y' + p(t)y = 0$.

Úloha 4.1 (přednáška)**.** *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' = t + y$.

Řešení. Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je t, příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot \mathrm{e}^t$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$

dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme

$$K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}\,.$$

3. Integrujeme:

$$K = \int t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme

$$y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t\,.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = C \cdot \mathrm{e}^t - t - 1.$$

□

Úloha 4.2 (cvičení)**.** *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' + y\cos t = \sin 2t$.

Řešení. Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y\cos t = 0$.

1. $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \cos t\,\mathrm{d}t$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru

$$y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}\cos t = \sin 2t;$$

dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme

$$K' = \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t.$$

3. Integrujeme:

$$K = \int \mathrm{e}^{\sin t} \sin 2t \,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{\sin t}\, 2 \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{ll} u = 2\sin t & v' = \mathrm{e}^{\sin t} \cos t \\ u' = 2\cos t & v = \mathrm{e}^{\sin t} \end{array} \right]$$

$$= 2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - \int 2\,\mathrm{e}^{\sin t} \cos t \,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}\,.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = 2(\sin t - 1) + C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 4.3. *Řešte* $y' + 2ty = 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$.

Řešení. Řešení HÚ:

$$y = C\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení NHÚ:

$$y = C\,\mathrm{e}^{-t^2} + t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

5 Bernoulliova diferenciální rovnice

Obecný tvar:

$$y' + p(t)y = q(t)y^m, \quad \text{kde} \quad m \neq 1,\ m \neq 0.$$

5.0.1 Postup při řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

1. Rovnici dělíme činitelem y^m (pro $m > 0$ je funkce $y = 0$ řešením Bernoulliovy rovnice, přidáme je k výsledku nakonec):

$$\frac{y'}{y^m} + p(t)\frac{1}{y^{m-1}} = q(t).$$

2. Provedeme substituci $\dfrac{1}{y^{m-1}} = z$, tj. $\dfrac{y'}{y^m} = \dfrac{1}{1-m}z'$. Pak do rovnice dosadíme a dostaneme tak lineární rovnici

$$z' + (1-m)p(t)z = (1-m)q(t).$$

3. Řešíme tuto lineární rovnici s neznámou funkcí z.

4. V získaném řešení se vrátíme k původní proměnné dosazením $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$.

Úloha 5.1 (přednáška)**.** *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' + y = t\sqrt{y}$ *(pro* $y > 0$*).*

Řešení. Provedeme dělení dle bodu 1:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = t.$$

Substitucí $\sqrt{y} = z$ dle bodu 2 přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + z = t \quad (z > 0).$$

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$K = C + t\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t},$$

takže

$$z = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + t - 2$$

a je tím naplněn bod 3.

Dle bodu 4 položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = \left(C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + t - 2\right)^2.$$

□

Úloha 5.2 (cvičení)**.** *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' + \frac{2}{x}y = \frac{2\sin x}{x}\sqrt{y}$*, (pro* $y > 0$*).*

Řešení. Provedeme dělení dle bodu 1:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = \frac{2\sin x}{x}.$$

Substitucí $\sqrt{y} = z$ dle bodu 2 přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + \frac{2}{x}z = \frac{2\sin x}{x} \quad (z > 0).$$

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K\frac{1}{x}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$z = C\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x}$$

a tím je naplněn bod 3.

Dle bodu 4 položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = \left(C\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x}\right)^2.$$

□

6 Ortogonální trajektorie

Úloha 6.1. $y = 3x + q$.

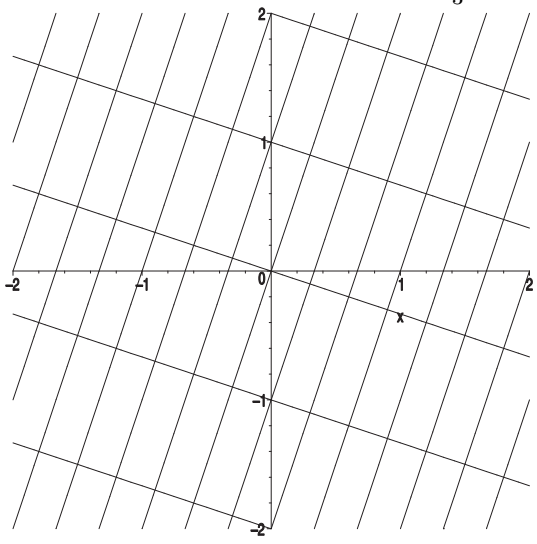
Řešení. Jde o soustavu rovnoběžných přímek o směrnici 3. Derivováním definující rovnice dostaneme

$$y' = 3,$$

a tak DR popisující soustavu ortogonální bude mít tvar:

$$y' = -\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + q,$$

tedy jde o soustavu rovnoběžných přímek o směrnici $-\frac{1}{3}$.



□

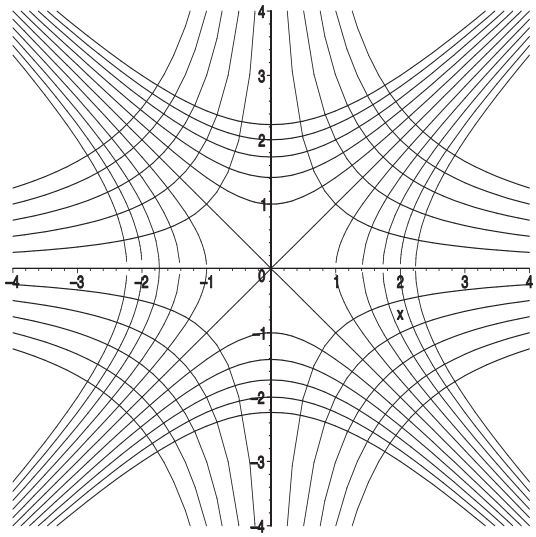
Úloha 6.2. $x \cdot y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Derivujeme:

$$y + xy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{y}{x}.$$

DR popisující soustavu ortogonální bude mít tvar:

$$y' = \frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 + C},\ C \in \mathbb{R}.$$



□

7 Izogonální trajektorie

Soustavy trajektorií diferenciálních rovnic, které se protínají pod konstantním úhlem φ.

Úhel, pod kterým se dvě křivky v daném bodě protínají je definován jako úhel, který svírají tečny k těmto křivkám v daném bodě průniku.

Úhel α, který svírá první tečna s osou x je určen prostřednictvím její směrnice, což je $\operatorname{tg}\alpha$. Tato směrnice je dána pravou stranou tvořící diferenciální rovnice prvního řádu:

$$y' = f_1(t, y), \quad \text{tedy} \quad \operatorname{tg}\alpha = f_1(t, y).$$

Úhel, který svírá druhá tečna s osou x, bude o dané φ větší nebo menší (to závisí na tom, kterým směrem budeme daný úhel uvažovat). Její směrnice tedy bude

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi).$$

Pokud druhou křivku uvažujeme jako trajektorii diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = f_2(t, y),$$

bude její směrnice také dána pravou stranou této DR:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = f_2(t, y).$$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)$ rozvedeme pomocí součtových vzorců a tím získáme vztah mezi $f_1(t,y)$ a $f_2(t,y)$:

$$f_2(t,y) = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi},$$

a tedy

$$f_2(t,y) = \frac{f_1(t,y) \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f_1(t,y)\operatorname{tg}\varphi}.$$

Úloha hledání izogonální soustavy trajektorií tedy zpočívá v tom, že k dané soustavě čar najdeme DR

$$y' = f_1(t,y),$$

načež řešením DR

$$y' = \frac{f_1(t,y) \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f_1(t,y)\operatorname{tg}\varphi}$$

dostaneme soustavu čar, resp. dvě soustavy čar, které se s tou původní protínají pod úhlem φ.

Úloha 7.1. *Najděte obě soustavy čar, které se protínají se soustavou hyperbol*

$$xy = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

pod konstantním úhlem $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Řešení. Derivujeme:

$$y + xy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{y}{x} \ \big(= f_1(x,y)\big).$$

DR $y' = f_2(x,y)$ popisující soustavu izogonální bude mít tvar:

$$y' = \frac{f_1(x,y) \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp f_1(x,y)\operatorname{tg}\varphi}, \quad \text{a tedy} \quad y' = \frac{-\frac{y}{x} \pm \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 \mp -\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}.$$

Řešíme tedy homogenní DR

$$y' = \frac{-\frac{y}{x} \pm 1}{1 \pm \frac{y}{x}}$$

substitucí

$$z = \frac{y}{x}, \quad zx = y, \quad z'x + z = y', \quad \text{tedy} \quad z'x + z = \frac{-z \pm 1}{1 \pm z}.$$

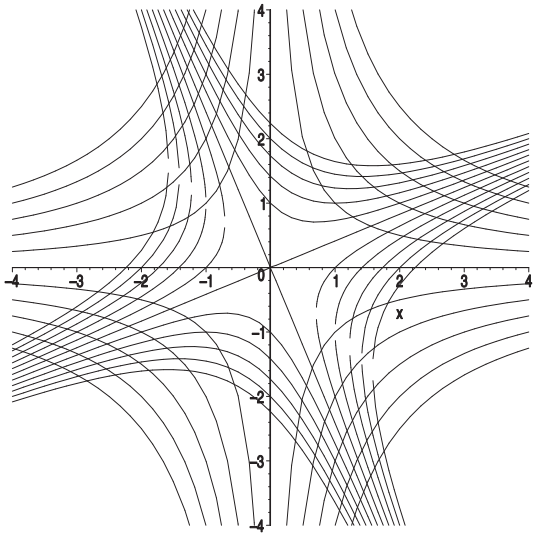
Po úpravě dostáváme

$$z'x = \frac{-z \pm 1 - (z \pm z^2)}{1 \pm z}, \quad z'x = \frac{-2z \pm (1 - z^2)}{1 \pm z}.$$

Nyní již rozdělíme naši úlohu volbou znamének na dva případy:

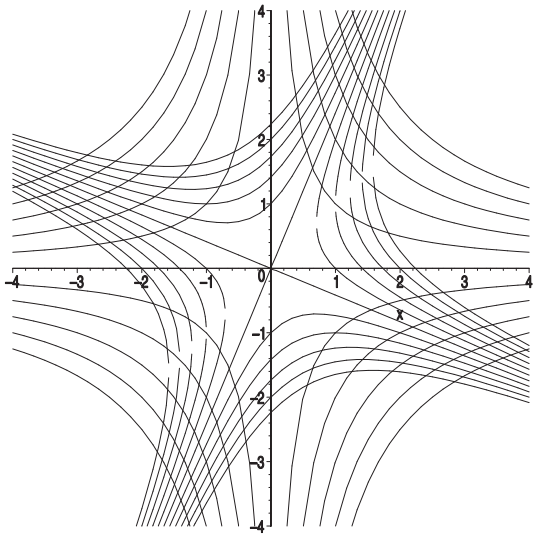
(+) Rovnici $z'x = \dfrac{-2z + (1 - z^2)}{1 + z}$ řešíme separací proměnných ($-z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{2}$, $z \equiv -1 - \sqrt{2}$ a $z \equiv -1 + \sqrt{2}$ jsou dvě řešení, která budou později zahrnuta do konečného zápisu):

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{-z^2-2z+1}\,\mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\int \frac{1+z}{-z^2-2z+1}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\frac{1}{-2}\int \frac{-2z-2}{-z^2-2z+1}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\frac{1}{-2}\ln\left|-z^2-2z+1\right| &= \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \\
\ln\left|-z^2-2z+1\right| &= -2\ln|x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0, \\
\left|-z^2-2z+1\right| &= \frac{C_2}{x^2}, \\
-z^2-2z+1 &= \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ (zahrnuta řešení pro } C = 0), \\
-\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} + 1 &= \frac{C}{x^2}, \\
-y^2 - 2xy + x^2 &= C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$



(−) Rovnici $z'x = \dfrac{z^2-2z-1}{1-z}$ řešíme podobně ($z^2-2z-1=0 \;\Rightarrow\; z=1\pm\sqrt{2}$, $z\equiv 1-\sqrt{2}$ a $z\equiv 1+\sqrt{2}$ jsou dvě řešení, která budou později zahrnuta do konečného zápisu):

$$\begin{aligned}
\frac{1-z}{z^2-2z-1}\,\mathrm{d}z &= \frac{\mathrm{d}x}{x},\\
\int \frac{1-z}{z^2-2z-1}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x},\\
\frac{1}{-2}\int \frac{2z-2}{z^2-2z-1}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x},\\
\frac{1}{-2}\ln\left|z^2-2z-1\right| &= \ln|x|+\ln C_1, \quad C_1>0,\\
\ln\left|z^2-2z-1\right| &= -2\ln|x|+\ln C_2, \quad C_2>0,\\
\left|z^2-2z-1\right| &= \frac{C_2}{x^2},\\
z^2-2z-1 &= \frac{C}{x^2}, \quad C\in\mathbb{R}, \text{ (zahrnuta řešení pro } C=0),\\
\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}-1 &= \frac{C}{x^2},\\
y^2-2xy-x^2 &= C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$



□