

# Diferenční rovnice

Jiří Fišer

7. prosince 2009

# Motivace

## Numerická řešení diferenciálních rovnic

- Při numerickém řešení (aproximací) diferenciálních rovnic ve skutečnosti používáme příslušnou diferenční rovnici, ať už si to uvědomujeme nebo ne.
- Ukažme si to na *Eulerově metodě*, jedné z nejjednodušších technik aproximace řešení diferenciální rovnice.

# Motivace

## Numerická řešení diferenciálních rovnic

- Uvažujme diferenciální rovnici prvního řádu

$$x'(t) = g(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t. \quad (1)$$

- Interval  $[t_0, b]$  rozdělíme na  $N$  stejných podintervalů.
- Velikost podintervalu nazýváme *velikostí kroku* metody a označujeme ji  $h = \frac{b-t_0}{N}$ .
- Velikost tohoto kroku definuje uzly  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ , kde  $t_j = t_0 + jh$ .
- Eulerova metoda aproximuje  $x'(t)$  pomocí  $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ .
- Dosazením do (1) dostaneme

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = g(x(t)),$$

a tedy

$$x(t+h) = x(t) + hg(x(t)).$$

- $x(t + h) = x(t) + hg(x(t))$
- Pro  $t = t_0 + nh$  máme

$$x[t_0 + (n + 1)h] = x(t_0 + nh) + hg[x(t_0 + nh)], \quad (2)$$

pro  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

- Při upraveném označení  $x(n) = x(t_0 + nh)$  získáme

$$x(n + 1) = x(n) + hg[x(n)]. \quad (3)$$

- Rovnice (3) definuje *Eulerův algoritmus*, který aproximuje řešení diferenciální rovnice (1) v uzlových bodech.
- Poznamenejme, že  $x^*$  je rovnovážným bodem diferenční rovnice (3) tehdy a jen tehdy když  $g(x^*) = 0$ .
  - To znamená, že diferenciální rovnice (1) a diferenční rovnice (3) mají stejné rovnovážné body.

- Nyní aplikujeme Eulerovu metodu na diferenciální rovnici (DR):

$$x'(t) = 0,7x^2(t) + 0,7, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (DR)$$

- Přesné řešení (pro kontrolu přesnosti metody) je  $x(t) = \tan(0,7t + \frac{\pi}{4})$ .
- Příslušná diferenční rovnice ( $\Delta R$ ) s použitím Eulerovy metody je

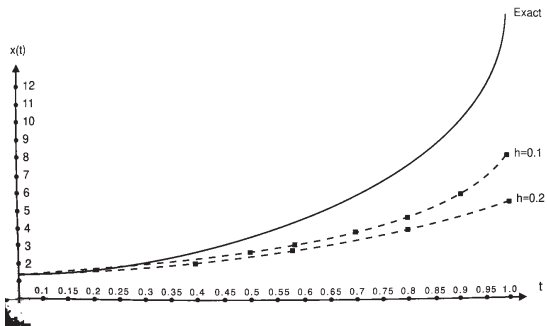
$$x(n+1) = x(n) + 0,7h(x^2(n) + 1), \quad x(0) = 1. \quad (\Delta R)$$

- Tabulka 1 ukazuje Eulerovy aproximace pro  $h = 0,2$  a  $0,1$  společně s přesnými hodnotami.
- Obrázek 1 obsahuje  $(n, x(n))$ -diagram. Všimněte si, že čím menší je krok, tím přesnější jsou aproximace.

# Motivace

## Numerická řešení diferenciálních rovnic

| $n$ | $t$ | $(\Delta R)$ -Euler<br>( $h = 0,2$ )<br>$x(n)$ | $(\Delta R)$ -Euler<br>( $h = 0,1$ )<br>$x(n)$ | $(DR)$ -přesně<br>$x(t)$ |
|-----|-----|------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------|
| 0   | 0   | 1                                              | 1                                              | 1                        |
| 1   | 0,1 |                                                | 1,14                                           | 1,150                    |
| 2   | 0,2 | 1,28                                           | 1,301                                          | 1,328                    |
| 3   | 0,3 |                                                | 1,489                                          | 1,542                    |
| 4   | 0,4 | 1,649                                          | 1,715                                          | 1,807                    |
| 5   | 0,5 |                                                | 1,991                                          | 2,150                    |
| 6   | 0,6 | 2,170                                          | 2,338                                          | 2,614                    |
| 7   | 0,7 |                                                | 2,791                                          | 3,286                    |
| 8   | 0,8 | 2,969                                          | 3,406                                          | 4,361                    |
| 9   | 0,9 |                                                | 4,288                                          | 6,383                    |
| 10  | 1   | 4,343                                          | 5,645                                          | 11,681                   |



Obrázek:  $(n, x(n))$ -diagram.

# Dynamika diferenčních rovnic prvního řádu

- Diferenční rovnice obvykle popisují vývoj jistého fenoménu s během (diskrétního) času.
- Například, jestliže nějaká populace má diskrétní generace,
  - velikost  $(n + 1)$ . generace  $x(n + 1)$  je funkcí  $n$ -té generace  $x(n)$ .
  - Tento vztah se vyjadřuje jako *diferenční rovnice*

$$x(n + 1) = f(x(n)). \quad (4)$$

- Na tento problém ale můžeme nahlížet i z jiného úhlu pohledu.
  - Řekněme, že zvolíme počáteční bod  $x_0$  a budeme generovat posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

- Pro zjednodušení přijmeme označení

$$f^2 = f(f(x_0)), f^3 = f(f(f(x_0))), \dots$$

- Množina všech (kladných) iterací  $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$  ( $f^0(x_0) = x_0$ ) se nazývá (*kladná*) *orbita* bodu  $x_0$  a budeme ji označovat  $O(x_0)$ .

- Tato iterativní procedura je příkladem *diskrétního dynamického systému*.
- S nastavením  $x(n) = f^n(x_0)$  dostáváme

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f[f^n(x_0)] = f(x(n)),$$

čímž opět dostáváme (4).

Všimněme si, že  $x(0) = f^0(x_0) = x_0$ .

Například, necht'  $f(x) = x^2$  a  $x_0 = 0,6$ . Nyní, například na kalkulačce, počítáme opakovaně druhou mocninu a dostáváme posloupnost

$$0,6, 0,36, 0,1296, 0,01679616, \dots$$

Ještě pár iterací a každému je jasné, že iterace  $f^n(0,6)$  směřují k nule. Dokažte, že stejnou limitu mají iterace pro  $x_0 \in (-1; 1)$ , zatímco pro  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$  směřují k nekonečnu. Zřejmě  $f^n(0) = 0$  a  $f^n(1) = 1$  pro  $n = 0, 1, 2, \dots$  a  $f^n(-1) = 1$  pro  $n = 1, 2, \dots$

# Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Typická lineární *homogenní* rovnice prvního řádu má tvar

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (5)$$

a příslušná *nehomogenní* rovnice je dána předpisem

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (6)$$

kde u obou rovnic předpokládáme, že  $a(n) \neq 0$  a  $a(n)$  a  $g(n)$  jsou reálné funkce definované pro  $n \geq n_0 \geq 0$ .

Řešení **homogenní** rovnice (5) můžeme opět získat prostým iterováním:

$$x(n_0 + 1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0,$$

$$x(n_0 + 2) = a(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = a(n_0 + 1)a(n_0)x_0,$$

$$x(n_0 + 3) = a(n_0 + 2)x(n_0 + 2) = a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)a(n_0)x_0.$$

A pomocí indukce snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n_0 + n - n_0) \\ &= a(n-1)a(n-2) \cdots a(n_0)x_0 \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\prod_{i=k+1}^k a(i) = 1 \text{ a } \sum_{i=k+1}^k a(i) = 0.$$

Jednoznačné řešení **nehomogenní** rovnice (6) může být nalezeno následovně:

$$\begin{aligned}y(n_0 + 1) &= a(n_0)y_0 + g(n_0), \\y(n_0 + 2) &= a(n_0 + 1)y(n_0 + 1) + g(n_0 + 1) \\&= a(n_0 + 1)a(n_0)y_0 + a(n_0 + 1)g(n_0) + g(n_0 + 1).\end{aligned}$$

Nyní opět pomocí matematické indukce ukážeme, že pro všechna  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \quad (8)$$

## Důležité speciální případy

Existují dva speciální případy rovnice (6), které jsou důležité v mnoha aplikacích. První rovnice je dána vztahem

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), \quad y(0) = y_0. \quad (9)$$

S použitím (8) zde dostaneme řešení

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \quad (10)$$

Druhé, ještě větší zjednodušení,

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad y(0) = y_0, \quad (11)$$

má řešení (využijeme (10))

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b \left[ \frac{a^n - 1}{a - 1} \right] & \text{if } a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{if } a = 1. \end{cases} \quad (12)$$

$$y(n+1) = (n+1)y(n) + 2^n(n+1)!, \quad y(0) = 1, \quad n > 0.$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \\ &= \left[ \prod_{i=0}^{n-1} (i+1) \right] 1 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} (i+1) \right] 2^r (r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} \left[ \frac{n!}{(r+1)!} \right] 2^r (r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r = 2^n n!, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r &= n! \left( 1 + \sum_{r=0}^{n-1} 2^r \right) = n! \left( 1 + 1 \frac{1-2^n}{1-2} \right) = \\ n! (1 - 1 + 2^n) &= n! 2^n. \end{aligned}$$

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0, 5.$$

$a(n) \equiv 2$  a  $n_0 = 1$ , tudíž

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) = \left[ \prod_{i=1}^{n-1} a \right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a \right] g(r) \\ &= \left[ a^{n-1} \right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[ a^{n-r-1} \right] g(r) = \left[ 2^{n-1} \right] 0,5 + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{n-r-1} 3^r \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left( \frac{3}{2} \right)^r = 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1 - \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} \right) \right] \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[ -3 \left( 1 - \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} \right) \right] = 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[ -3 + 3 \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} \right] \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[ -3 + 2 \left( \frac{3}{2} \right)^n \right] = 2^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n \left( \frac{3}{2} \right)^n \\ &= 2^{n-2} - 6 \cdot 2^{n-2} + 3^n = 3^n - 5 \cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

- Pacient užívá lék vždy po čtyřech hodinách.
- $D(n)$  je množství účinné látky v krevním systému v  $n$ -tém intervalu.
- Tělo během každého intervalu eliminuje  $p$ -tinu účinné látky.

- Nalezněte  $D(n)$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(n)$ , jestliže užívaná dávka je  $D_0$ .

**Řešení** Nejprve musíme převést slovní zadání do rovnice, kterou potom vyřešíme. Zřejmě

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

S využitím (12) dostáváme

$$D(n) = \left[ D_0 - \frac{D_0}{p} \right] (1-p)^n + \frac{D_0}{p},$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(n) = \frac{D_0}{p}. \quad (13)$$

Nechť  $D_0 = 2 \text{ [cm}^3\text{]}$  a  $p = 0,25$ , potom původní rovnice je

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2, \quad D_0 = 2.$$

Tabulka 2 obsahuje hodnoty  $D(n)$  pro  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ .

| $n$    | 0 | 1   | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    | 7   | 8   | 9    | 10   |
|--------|---|-----|------|------|-----|------|------|-----|-----|------|------|
| $D(n)$ | 2 | 3.5 | 4.62 | 5.47 | 6.1 | 6.58 | 6.93 | 7.2 | 7.4 | 7.55 | 7.66 |

Tabulka: Hodnoty  $D(n)$

Z (13) zjistíme, že rovnovážným stavem množství účinné látky v těle je

$$D^* = \lim_{n \rightarrow \infty} D(n) = 8 \left[ \text{cm}^3 \right].$$

# Umořování

- Umořování je proces, při kterém je splácen dluh (ne)pravidelnými platbami v pravidelných intervalech.
- Každá splátka se skládá z úroku za příslušné období a z částky snižující dluh (úmoru).
- Necht' do každého období vstupujeme s dluhem  $p(n)$ , který je v tomto období úročen s úrokovou mírou  $r$ , vztaženou k platební periodě.
- Na konci  $n$ -tého období je realizována splátka  $g(n)$ .

- Formulace našeho modelu je založena na faktu, že
  - ▶ dluh  $p(n+1)$  na počátku  $(n+1)$ -ho období je roven předchozí hodnotě dluhu  $p(n)$ ,
  - ▶ k níž musíme přičíst úrok za poslední období,  $rp(n)$
  - ▶ a naopak odečíst splátku  $g(n)$ .

Tedy

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n) = (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0,$$

kde  $p_0$  značí počáteční hodnotu dluhu.

- Jde o případ s konstantním koeficientem u  $p(n)$ , takže můžeme využít (10)

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k).$$

- Ve speciálním případě může jít o úlohu s konstantní splátkou ( $g(n)$  je konstantní) nebo
- s konstantním úmorem ( $p(n+1) - p(n)$  je konstantní).
- Úloha na výpočet pevného počtu  $n$  konstantních splátek  $T$  nás vede k rovnici

$$p(n) = 0,$$

konkrétně

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} T = (1+r)^n p_0 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} T = 0.$$

Odtud

$$T = p_0 \left[ \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \right].$$

Pro  $p_0 = 100\,000$ ,  $r = 0,1$  a  $n = 5$  dostaneme

$$T = 100\,000 \left[ \frac{0,1}{1 - (1 + 0,1)^{-5}} \right] \approx 26\,380.$$

| $k$<br>$k$ | Dluh<br>$p(k)$ | Splátka<br>$g(k)$ | Úrok<br>$rp(k)$ | Úmor<br>$g(k) - rp(k)$ | Nový dluh<br>$p(k + 1)$ |
|------------|----------------|-------------------|-----------------|------------------------|-------------------------|
| 0          | 100 000        | 26 380            | 10 000          | 16 380                 | 83 620                  |
| 1          | 83 620         | 26 380            | 8 362           | 18 018                 | 65 602                  |
| 2          | 65 602         | 26 380            | 6 560           | 19 820                 | 45 782                  |
| 3          | 45 782         | 26 380            | 4 578           | 21 802                 | 23 980                  |
| 4          | 23 980         | 26 380            | 2 398           | 23 982                 | 0                       |
| 5          | 0              |                   |                 |                        |                         |

Tabulka: Umořovací plán

# Cvičení 8 a 11

1 Nalezněte řešení následujících diferenčních rovnic:

1  $x(n+1) - (n+1)x(n) = 0, x(0) = c.$

2  $x(n+1) - 3^n x(n) = 0, x(0) = c.$

3  $x(n+1) - e^{2n} x(n) = 0, x(0) = c.$

4  $x(n+1) - \frac{n}{n+1} x(n) = 0, n \geq 1, x(1) = c.$

2 Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:

1  $y(n+1) - \frac{1}{2}y(n) = 2, y(0) = c.$

2  $y(n+1) - \frac{n}{n+1}y(n) = 4, y(0) = c.$

3 Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:

1  $y(n+1) - (n+1)y(n) = 2^n(n+1)!, y(0) = c.$

2  $y(n+1) = y(n) + e^n, y(0) = c.$

- 4
- 1 Napište diferenční rovnici popisující počet oblastí vytvořených  $n$  přímkami v rovině, jestliže se každé dvě protnou, a to nejvýše dvě v jednom bodu.
- 2 Nalezněte zmíněný počet oblastí vyřešením nalezené diferenční rovnice.

- 1 Gama funkce je definována jako  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ,  $x > 0$ .
- 1 Ukažte, že  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(1) = 1$ .
  - 2 Ukažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\Gamma(n+1) = n!$ .
  - 3 Ukažte, že  $x^{(n)} = x(x-1) \cdots (x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$ .
- 2 Prostor (3D) je rozdělen  $n$  rovinami, ze kterých žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné čtyři nemají společný bod.
- 1 Napište diferenční rovnici popisující počet vytvořených oblastí.
  - 2 Nalezněte počet těchto oblastí.
- 3 Ověřte (10).
- 4 Ověřte (12).
- 5 Dluh \$12.000 má být umořen stejnými splátkami o velikosti \$380 na konci každého měsíce, plus poslední splátkou, která může být menší. Sestavte splátkový kalendář při roční úrokové míře 12% s měsíčním připisováním úroků.

- 1 Uvažujte půjčku ve výši \$80.000, která má být splacena stejnými měsíčními splátkami. Nalezněte výši této splátky, jestliže roční úroková míra je 10%, připisování úroků je měsíční a doba splácení je 30 let.
- 2 Uvažujme, že na konci každé periody uložíme sumu  $T$  do banky, která ji úročí s úrokovou mírou  $r$  vztaženou k dané periodě. Nechť  $A(n)$  značí naspořenou částku po  $n$  periodách.
  - 1 Napište diferenční rovnici, která popisuje  $A(n)$ .
  - 2 Tuto diferenční rovnici vyřešte pro  $A(0) = 0$ ,  $T = \$200$  a  $r = 0,008$ .
- 3 Bylo zjištěno, že teplota tělesa je  $110^\circ\text{F}$ . Dále bylo vypořádováno, že vždy po dvou hodinách je změna teploty tělesa dána jako  $-0,3$  násobek rozdílu předchozí teploty tělesa a teploty v místnosti, která je stále  $70^\circ\text{F}$ .
  - 1 Napište diferenční rovnici, která popisuje teplotu  $T(n)$  tělesa na konci  $n$ -té periody.
  - 2 Nalezněte  $T(n)$ .

- 1 Uvažujete o hypotéce na 30 let při roční úrokové míře 8%. Kolik si můžete dovolit půjčit, jestliže jste schopni splácet \$1.000 měsíčně?
- 2 Radium se rozpadá v míře 0,04% ročně. Jaký je jeho poločas rozpadu?
- 3 (Určování stáří uhlíkovou metodou) Je známo, že obsah uhlíku  $C_{14}$  v rostlinách a tělech živočichů je v době jejich života stejný jako v atmosféře. Po jejich úmrtí obsah uhlíku  $C_{14}$  v jejich tkáních klesá s mírou  $r$ .
  - 1 Nalezněte  $r$ , jestliže poločas rozpadu uhlíku  $C_{14}$  je 5.700 let.
  - 2 Jak stará je zkoumaná zvířecí kost, jestliže v ní zůstalo 70% původního množství uhlíku  $C_{14}$ ?