Doplněk k přednášce z 9. 11. 2009 — odvození

2) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ **(dvojnásobný reálný charakteristický kořen)**

FSŘ: $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Úloha 0.1. *Ukažte, že y_2 je řešením HLDR$_{2.ř.}$.*

Řešení. Přímo dosadíme:

$$y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y_2' = \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 2\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

$$\begin{aligned}
y_2'' + a y_2' + b y_2 &= 0,\\
2\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\,\mathrm{e}^{\lambda x} + a\left(\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right) + b\left(x\,\mathrm{e}^{\lambda x}\right) &= 0,\\
\mathrm{e}^{\lambda x}\Big[2\lambda + \lambda^2 x + a + a\lambda x + bx\Big] &= 0,\\
\mathrm{e}^{\lambda x}\Big[x(\underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}_{=0}) + \underbrace{2\lambda + a}_{=0}\Big] &= 0,\\
0 &= 0,
\end{aligned}$$

neboť první výraz je levou stranou charakteristické rovnice (a tak po dosazení jejího řešení λ je roven nule).

Druhý výraz můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$2\lambda + a = 2\left(-\frac{a}{2}\right) + a = -a + a = 0,$$

neboť

$$\lambda \left(= \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}\right) = \frac{-a \pm \overbrace{\sqrt{a^2 - 4\cdot 1\cdot b}}^{\text{(z předpokladu)}=0}}{2} = -\frac{a}{2}.$$

□

3) $\lambda_1 = \alpha + \imath\beta$**,** $\lambda_2 = \alpha x - \imath\beta$ **(dva komplexně sdružené char. kořˇ.)**

FSŘ: $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Úloha 0.2. *Ukažte, že* y_1 *a* y_2 *jsou řešení* $HLDR_{2.\check{r}}$.

Řešení. Přímo dosadíme:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ y_1' &= \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ y_1'' &= \alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'' + ay_1' + by_1 &= 0, \\ \alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + & \\ +a\Big(\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\Big) + b\Big(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\Big) &= 0, \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\Big(\alpha^2\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\sin(\beta x) - \beta^2\cos(\beta x) + & \\ +a\alpha\cos(\beta x) - a\beta\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)\Big) &= 0, \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\Big(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b\Big) + \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\Big(-2\alpha\beta - a\beta\Big) &= 0, \end{aligned}$$

Nyní je třeba ukázat, že výrazy

$$(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b) \quad \text{a} \quad (-2\alpha\beta - a\beta)$$

jsou rovny nule.

Z charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad (\text{kde} \quad D = a^2 - 4b < 0),$$

víme, že

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

tedy

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

a opačně

$$a = -2\alpha, \quad b = \beta^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \beta^2 + \left(\frac{-2\alpha}{2}\right)^2 = \beta^2 + \alpha^2.$$

Dosadíme do zkoumaných vztahů:

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\alpha + \beta^2 + \alpha^2 = 0,$$

$$-2\alpha\beta - a\beta = -2\alpha\beta + 2\alpha\beta = 0.$$

y_1 je tedy opravdu řešením.

S y_2 pracujeme obdobně. □