



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Registrační číslo projektu: **CZ.1.07/2.2.00/15.0243**
Název projektu: Modernizace studia aplikované matematiky
na PřF Univerzity Palackého v Olomouci

Zaměstnanec: **Jiří Fišer RNDr., Ph.D.**
Inovovaný předmět: **Matematika 3 (KMA/M3)**
Období: **září, říjen a 1. listopad 2010**

Datum: 12.11.2010

KMA/M3: Přednáška č. 1

Obyčejné diferenciální rovnice

Úvodní ilustrační příklad možného využití diferenciálních rovnic

Úvodní příklad - vrh tělesem svisle dolů

těleso: hmotnost m
počáteční rychlost v_0

Jaká je jeho rychlost v v závislosti
na čase t ?

Na těleso působí zemská tíže - urychluje,
a odpor vzduchu - zpomaluje.

přímě úměrný aktuální rychlosti s koef. k

2. Newtonův zákon:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F$$

zrychlení tělesa způsobené silou F

$$F = \underbrace{mg}_{\text{tíhová síla}} - \underbrace{kv}_{\text{síla odporu vzduchu (působí proti, tedy záporná)}}$$

g -tíhové zrychlení

$v = v(t)$ tedy splňuje rovnici

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \begin{matrix} t \in \langle 0; +\infty \rangle \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad (1)$$

$$\text{Řešení: } v = v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad \begin{matrix} t \in \langle 0; +\infty \rangle \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ověření: } \frac{dv}{dt} &= -C \cdot \frac{k}{m} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \\ L &= m \cdot \left(-C \cdot \frac{k}{m}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} = -ck \cdot e^{-\frac{k}{m}t}, \quad P = mg - k \cdot C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} - mg = \\ &= -ck e^{-\frac{k}{m}t} \\ L &= P \end{aligned}$$

Jelikož $c \in \mathbb{R}$, existuje nekonečně mnoho funkcí (řešení) vyhovujících dané (diferenciální) rovnici (1).

Počáteční podmínka $v(0) = v_0$

Víme, že na počátku bylo těleso vrženo k zemi rychlostí v_0 , tuto informaci nyní využijeme:

$$v(t) = c e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$(v_0 =) v(0) = c \cdot e^{-\frac{k}{m}0} + \frac{mg}{k} = c + \frac{mg}{k}$$

$$v_0 = c + \frac{mg}{k}$$

$$c = v_0 - \frac{mg}{k}$$

$$v = v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2')$$

(2) - obecné řešení

(2') - partikulární řešení

Daná řešení pro $k > 0$ (nemůžeme ^{přímou} zanedbat odpor vzduchu)

$$\text{ALE} \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} \right]}_{\rightarrow 0} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

1 Diferenciální rovnice: základní pojmy

Úloha 1.1. Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.

Řešení. Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta. $\square$

Úloha 1.2. Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.

Řešení. Z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna například pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. $\square$

Úloha 1.3. Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.

Řešení. Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde C je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2 + C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t + 3$ vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce. $\square$

To jsou 3 příklady diferenciálních rovnic.

Definice 1.4. *Diferenciální rovnice* je název pro rovnice, kde neznámou je funkce a v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace neznámé funkce. **Řád** diferenciální rovnice, to je řád nejvyšší derivace neznámé funkce v rovnici.

V našich příkladech jde o rovnice 1., 2. a 1. řádu. V matematice i v aplikacích se pracuje s *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací, a také s *parciálními diferenciálními rovnicemi*, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.

Definice 1.5. *Řešením (integrálem) diferenciální rovnice nazýváme každou funkci, která po dosazení vyhovuje na nějakém intervalu dané diferenciální rovnici.*

Tak rovnice z příkladu 1.2 má řešení $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, ale též $y_3 = 5 \cos t - \sin t$, $y_4 = C \sin t$ (kde C je libovolná konstanta) a další.

Definice 1.6. *Obecným řešením diferenciální rovnice n -tého řádu nazýváme to řešení, v němž se vyskytuje n libovolných konstant, které nelze nahradit menším počtem konstant.*

Tak třeba funkce $y = C_1 C_2 \sin t$ není obecným řešením diferenciální rovnice z příkladu 1.2, neboť lze položit $C = C_1 C_2$ a v řešení $y = C \sin t$ je už jen jedna libovolná konstanta. Uvedená rovnice má obecné řešení $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, ale také třeba $y = A \sin(t - \varphi)$, kde A, φ jsou libovolné konstanty.

Definice 1.7. *Partikulárním řešením diferenciální rovnice nazýváme řešení, které lze dostat z obecného řešení tím, že za některé konstanty C volíme přípustné číselné hodnoty.*

V této kapitole se budeme dále zabývat již jen obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu, které lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f(t, y).$$

Řešení rovnice může mít tvar explicitní, například $y = t + C$, nebo implicitní, například $y - t = C$.

Definice 1.8. Mějme diferenciální rovnici $y' = f(t, y)$ a dále nechť t_0, y_0 jsou libovolně daná reálná čísla. **Cauchyova počáteční úloha** znamená najít partikulární řešení $y(t)$ dané diferenciální rovnice, které je definována na nějakém intervalu I (kde $t_0 \in I$) a splňuje podmínku

$$y(t_0) = y_0.$$

Tato podmínka se nazývá **Cauchyova počáteční podmínka**.

Příklad Cauchyovy úlohy je v úloze 1.3.

Geometrický význam řešení diferenciální rovnice

Na obecné řešení diferenciální rovnice se můžeme dívat jako na množinu funkcí s parametrem C , tj. jako na množinu všech partikulárních řešení. Grafem každého partikulárního řešení je nějaká křivka; nazýváme ji *integrální křivka*. Geometrickým významem obecného řešení je tedy jednoparametrická soustava čar — integrálních křivek. Například obecné řešení rovnice z úlohy 1.3 znamená (v pravoúhlém souřadnicovém systému s osami t, y) soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$. Partikulární řešení dané Cauchyovou počáteční podmínkou $y(2) = 5$ pak znamená tu přímku soustavy, která prochází bodem $[2; 5]$.

Domácí cvičení

Úloha 1.9. Zjistěte, zda funkce

$$y = 1 + e^x + x - \frac{1}{2}x^2$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y'' - y' - x = 0$$

a na jaké množině (intervalu).

KMA/M3: Přednáška č. 2

2 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

V této kapitole se budeme zabývat obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu ve tvaru

$$y' = f(t, y), \quad (1)$$

kde f je funkce dvou proměnných definovaná na $G \subset \mathbb{R}^2$.

Cauchyova počáteční úloha

Je dána DR (1) a dvě reálná čísla t_0 a y_0 , kde $(t_0, y_0) \in G$.

Máme nalézt řešení DR (1), které splňuje Cauchyovu počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Věta 2.1. *Nechť $f(t, y)$ je spojitá na $G \subset \mathbb{R}^2$. Pak pro každý bod $(t_0, y_0) \in G$ existuje alespoň jedno řešení $h(t)$ diferenciální rovnice (1), definované na nějakém intervalu I obsahujícím bod t_0 a splňujícím podmínku $h(t_0) = y_0$.*

Má-li navíc $f(t, y)$ omezenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$, pak ke každému $(t_0, y_0) \in G$ existuje právě jedno řešení $h(t)$ diferenciální rovnice (1), definované v jistém nejširším intervalu I obsahujícím bod t_0 a splňujícím podmínku $h(t_0) = y_0$.

Každé jiné řešení $g(t)$ splňující podmínku $g(t_0) = y_0$ je částí tohoto řešení, tzn. že pro $x \in U(t_0)$ platí $g(t) = h(t)$.

Schematicky:

$$f(t, y) \text{ spojitá na } G \implies \text{EXISTENCE}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(t, y) \text{ spojitá na } G \\ + \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ omezená na } G \end{array} \right\} \implies \text{JEDNOZNAČNOST}$$

Úloha 2.2 (Nejednoznačnost). Řešte $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

Řešení. $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{y^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}^2 \implies$ existence.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}} \implies$ v okolí 0 není omezená $\implies$ není splněna podmínka jednoznačnosti, takže ji nemáme zaručenu.

Ve skutečnosti opravdu dochází k nejednoznačnosti řešení (CPÚ): pro bod $(0, 0)$ máme jednak řešení $y \equiv 0$, ale také řešení $y = t^3$, obě řešení jsou definovány na $I = (-\infty; +\infty)$.

Neexistuje okolí $U(0)$, na kterém by si byla rovna, ani jedno není částí druhého. $\square$

Směrové pole

DR (1) dává každému bodu $(t, y) \in G$ právě jednu hodnotu y' , kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem (t, y) . Krátkou úsečku se středem v (t, y) a ležící na této přímce nazveme *lineární element*.

Množina všech lineárních elementů tvoří *směrové pole* dané DR.

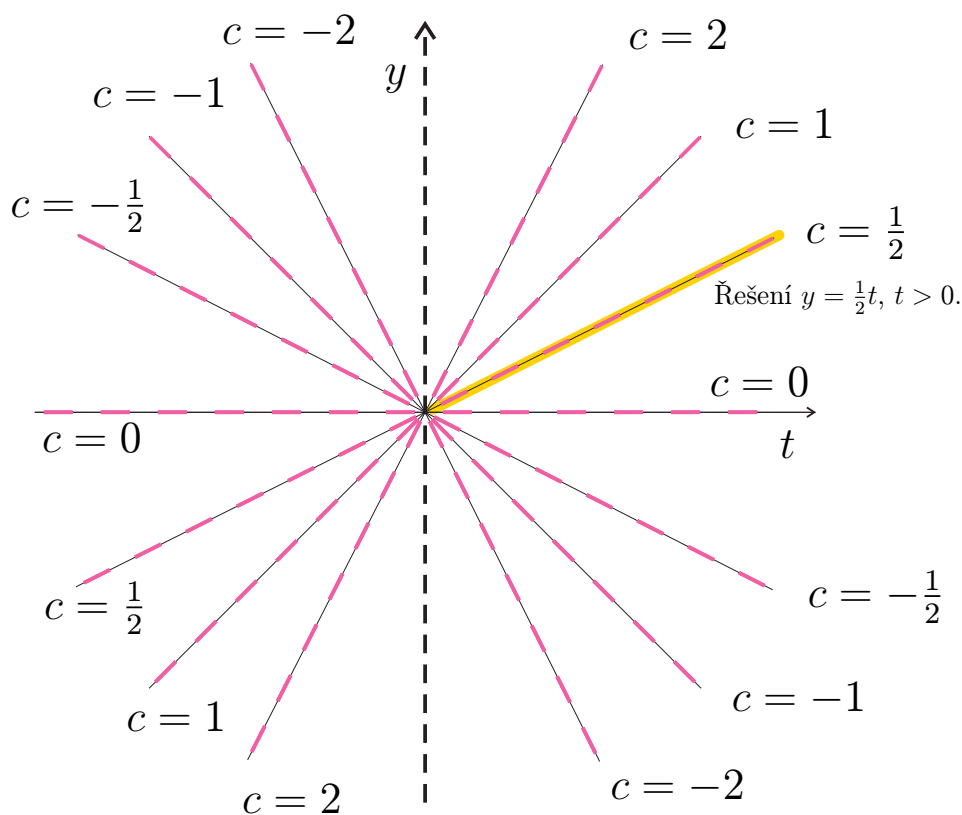
Grafy řešení $y = h(t)$ DR (1) mají tu vlastnost, že jejich tečna v každém bodě $(t, h(t))$ má směrnici $f(t, h(t))$, takže obsahuje příslušný lineární element. Opačně řečeno: lineární element se středem v bodě (t, y) je tečný ke grafu řešení, které tímto bodem prochází.

Křivky, ve kterých je $y' = f(t, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, se nazývají *izokliny*. (Lineární elementy se středy na této křivce mají všechny stejnou směrnici c .)

Úloha 2.3 (Směrové pole). *Sestrojte směrové pole DR $y' = \frac{y}{t}$ pomocí izoklin. Pokuste se načrtnout graf nějakého řešení.*

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = \frac{y}{t}$ je definována pro $t \neq 0$ (tím je dáno G).

Izokliny: $\frac{y}{t} = c$, a tedy $y = ct$. Jde tedy o přímky (resp. polopřímky, neboť $t \neq 0$) se směrnicí c , procházející počátkem, na kterých směrnice lineárních elementů mají totožnou hodnotu c . To znamená, že jsou v dané polopřímce obsaženy. Současně z toho plyne, že i grafy řešení se s těmito polopřímkami shodují.



□

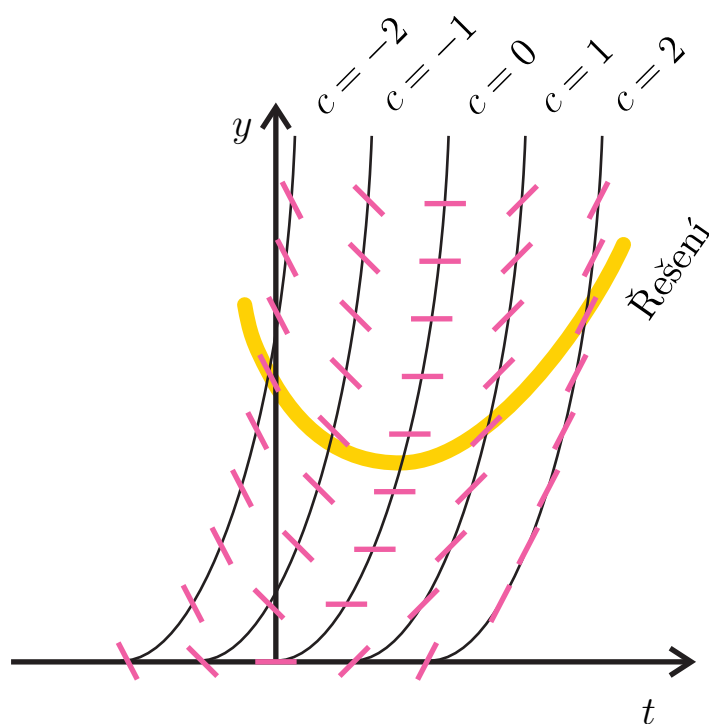
Úloha 2.4 (Směrové pole). *Sestrojte směrové pole DR $y' = t - \sqrt{y}$ pomocí izoklin. Pokuste se načrtnout graf nějakého řešení.*

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = \frac{y}{x}$ je definována pro $y \geq 0$ (tím je dáno G).

Izokliny: $t - \sqrt{y} = c$, a tedy $\sqrt{y} = t - c$. Zde můžeme nahlédnout, že výraz dává smysl pro $t \geq C$, neboť levá strana ($\sqrt{y}$) je nutně nezáporná, což samozřejmě musíme požadovat i po pravé straně. Celkově tedy dostaneme:

$$y = (t - c)^2, \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \geq c.$$

Pro zvolené c tedy půjde polovinu paraboly s vrcholem (počátkem) v bodě $(c, 0)$.



□

Domácí cvičení

Úloha 2.5. *Pro následující diferenciální rovnice sestrojte směrové pole, načrtněte izokliny a graf řešení.*

a) $y' = y - x^2$,

b) $2y' + 2y - x - 3 = 0$,

c) $y' = \frac{y}{x - y}$,

d) $y' = x^2 + y^2$.

KMA/M3: Přednáška č. 3

Základní problémy při řešení DR

V dalších paragrafech této kapitoly uvedeme určité metody řešení *vybraných typů* diferenciálních rovnic, přičemž budeme vždy předpokládat, že řešení dané diferenciální rovnice existuje. K tomu ještě praktická poznámka: Víme, že primitivní funkce k funkci spojitě sice existuje, ale primitivní funkce k funkci elementární obecně už není funkce elementární. Dovedeme tedy v elementárních funkcích integrovat jen vybrané typy funkcí. Tato vlastnost se přenáší i na diferenciální rovnice, tedy i když je funkce $f(t, y)$ vyjádřena elementárními funkcemi, dovedeme řešení rovnice $y' = f(t, y)$ vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen u některých typů rovnic (algoritmy řešení pro část z nich uvádíme v dalších paragrafech).

Chceme-li tedy úspěšně řešit takové diferenciální rovnice, je třeba:

- poznat, jakého typu je zadaná rovnice,
- znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,
- správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

3 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u rovnic, které lze převést na tvar

$$(*) \quad \varphi(y) \, dy = \psi(t) \, dt$$

(separace proměnných znamená, že na jedné straně rovnice je pouze proměnná y , na druhé straně pouze proměnná t).

Je-li $y = u(t)$ nějaké řešení rovnice $(*)$ na intervalu J , pak pro $t \in J$ je $dy = u'(t) \, dt$, takže platí $\varphi(u(t))u'(t) \, dt = \psi(t) \, dt$ a je to identická rovnost dvou diferenciálů na J , tj. $d\Phi(u(t)) = d\Psi(t)$, kde funkce Φ, Ψ jsou primitivní k funkcím φ, ψ (u nichž se zřejmě předpokládá například spojitost). Proto platí $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$. Znamená to, že funkce $u(t)$ jako řešení diferenciální rovnice $(*)$ vyhovuje současně rovnici

$$(**) \quad \Phi(y) = \Psi(t) + C.$$

Toto tvrzení platí i naopak, tedy každá funkce $y = u(t)$, která vyhovuje rovnici $(**)$, splňuje též rovnici $(*)$, jak plyne z derivace identity $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$.

Závěr: Funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice $(*)$ právě tehdy, když vyhovuje rovnici $(**)$; touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice $(*)$.

Úloha 3.1. Najděte obecné řešení rovnice $(1+t)y' = t(1-y)$.

Řešení. Tato rovnice je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{dy}{dt}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{dy}{1-y} = \frac{t dt}{1+t},$$

přičemž použitá metoda vyžaduje předpoklady $y \neq 1$, $t \neq -1$. Odsud

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{t dt}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln|1+t| - \ln|1-y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmuje a máme

$$\left| \frac{1+t}{1-y} \right| = C_1 e^t.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2 e^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3 e^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$\begin{aligned} 1-y &= C_3 e^{-t}(1+t), \\ y &= 1 - C_3 e^{-t}(1+t), \end{aligned}$$

což je obecné řešení v explicitním tvaru (ale ještě ne definitivním).

Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y = 1$ je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do dané diferenciální rovnice:

$$L = (1+t)y' = 0, \quad P = t(1-y) = 0,$$

takže funkce $y = 1$ skutečně je řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C . Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$y = 1 + C e^{-t}(1+t),$$

kde $C = -C_3 \vee 0$.

Podívejme se ještě na podmínku $t \neq -1$. Pro $t = -1$ máme $y = 1$, tedy všechny integrační křivky procházejí bodem $[-1; 1]$. Uvědomíme si, že Cauchyova úloha $y(-1) = 1$ není řešitelná jednoznačně a například Cauchyova úloha $y(-1) = 2$ nemá řešení. $\square$

Úloha 3.2. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $yy' = \frac{1-2t}{y}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
 y \cdot y' &= \frac{1-2t}{y} \quad | : y \neq 0 \leftarrow \text{definiční obor} \\
 y' &= \frac{1-2t}{y^2} \\
 \frac{dy}{dt} &= \frac{1-2t}{y^2} \quad | \cdot y^2 \cdot dt \\
 y^2 \cdot dy &= (1-2t) dt \\
 \int y^2 dy &= \int (1-2t) dt \\
 \frac{1}{3} y^3 &= t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
 y^3 &= 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R} \\
 \left[y &= \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \right]
 \end{aligned}$$

□

Domácí cvičení

Úloha 3.3. Znázorněte soustavu partikulárních řešení diferenciální rovnice z úlohy 3.1.

Úloha 3.4. Pomocí separace proměnných vyřešte následující DR:

1. $y' = \frac{y}{x},$

2. $y' = \frac{x}{y},$

3. $y' = -\frac{y}{x},$

4. $y' = -\frac{x}{y},$

5. $y' = \frac{y-1}{x^2 y^2}.$

KMA/M3: Přednáška č. 4

4 Užití substitucí

U některých typů diferenciálních rovnic lze pomocí vhodných substitucí (transformace neznámé funkce, případně i transformace nezávisle proměnné) přeměnit tyto rovnice na separovatelné.

a) Rovnice typu $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$

Užijeme substituci $z = \alpha t + \beta y + \gamma$, odkud $z' = \alpha + \beta y'$, tj. $y' = \frac{1}{\beta}(z' - \alpha)$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z' = \alpha + \beta f(z),$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $\alpha + \beta f(z)$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se ovšem vracíme k původní proměnné.

Příklady takových DR

Příklady:

- $y' = t + y$ $z = t + y$
- $y' = (t + y + 5)^3$ $z = t + y + 5$
- $y' = \cos(2y + 5)$ $z = 2y + 5$
- $y' = \frac{2t + 6y - 2}{\sin(t + 3y - 1)}$ $z = t + 3y - 1$

Úloha 4.1. Řešte rovnici $y' = t + y$.

Řešení. Zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = t + y$, odkud $z' = 1 + y'$, tj. $y' = z' - 1$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice máme $z' - 1 = z$, neboli

$$z' = z + 1.$$

Dělením této rovnice výrazem $(z + 1)$, kde $z \neq -1$, a násobením dt provedeme separaci proměnných, z níž

$$z + 1 = C_1 e^t,$$

neboli

$$y = C_1 e^t - 1 - t,$$

kde $C_1 \neq 0$ je libovolná konstanta. Rovnost $z = -1$ dává $y = -1 - t$, a to je funkce, která (jak zjistíme dosazením do dané diferenciální rovnice) je rovněž řešením. Obecné řešení je tedy

$$y = C e^t - 1 - t,$$

kde C je libovolná konstanta. □

Úloha 4.2. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y' = (4y - t)^2$.

Řešení.

$$y' = (4y - t)^2 \quad (\text{lineární výraz})$$

$$\begin{aligned} \text{Substituce: } z &= 4y - t \\ z' &= 4y' - 1 \\ y' &= \frac{z' + 1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme: } \frac{z' + 1}{4} = z^2, \quad z' = 4z^2 - 1,$$

$$\frac{dz}{dt} = 4z^2 - 1 \quad | : (4z^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{z \neq \pm \frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{4z^2 - 1} = dt, \quad \int \frac{dz}{4z^2 - 1} = \int dt,$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dz}{2z+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{2z-1} = \int dt$$

$$-\frac{1}{4} \ln|2z+1| + \frac{1}{4} \ln|2z-1| = t + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = t + \ln C_1$$

$$z = \frac{1}{2}: L = z' = 0$$

$$P = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

je řešením

$$z = -\frac{1}{2}: L = z' = 0$$

$$P = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

je také řešením

$$\ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = 4t + \ln C_2, \quad C_2 > 0$$

$$\left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = C_2 \cdot e^{4t}$$

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C_3 e^{4t}, \quad C_3 \neq 0 \quad (C_3 = \pm C_2)$$

Když u C_3 povolíme 0, dostaneme do tohoto zápisu i řešení $z \equiv \frac{1}{2}$ (tedy nula v čitateli na levé straně).

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešení $z \equiv -\frac{1}{2}$ odpovídá nule ve jmenovateli, takže je zapíšeme zvlášť:

$$\left[\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad z \equiv -\frac{1}{2} \right]$$

Návrat před substitucí:

$$\left[\frac{8y-2t-1}{8y-2t+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{t-\frac{1}{2}}{4} \right]$$

□

b) Rovnice typu $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, tzv. homogenní rovnice

Této rovnici se říká homogenní podle toho, že funkce F na pravé straně je tzv. *homogenní funkce*. Užijeme substituci $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z't = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.

Příklady takových DR

Příklady

$$y' = \frac{2t^5 - 3y^4 t^4}{-t^3 y^2 + y^4 t^1} \cdot \frac{1}{t^5}$$

$$y' = \frac{2 - 3\left(\frac{y}{t}\right)}{-\left(\frac{y^2}{t^2}\right) + \left(\frac{y^4}{t^4}\right)}$$

$$2 + y y' = y^2 - t^2$$

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2 + y} \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{t}\right)} \quad \text{Subst: } z = \frac{y}{t}$$

$$2ty y' = y^2 - t^2$$

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty} \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{t}\right)}$$

$$y^2 dt + (t^2 - ty) dy = 0$$

$$y^2 + (t^2 - ty) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y' = \frac{-y^2}{t^2 - ty} \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$y' = \frac{-\left(\frac{y}{t}\right)^2}{1 - \left(\frac{y}{t}\right)}$$

Úloha 4.3. Řešte rovnici $2tyy' = y^2 - t^2$.

Řešení. Rovnici nejprve upravíme na tvar:

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}$$

a po dělení čitatele i jmenovatele výrazem t dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{t}}.$$

Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$.

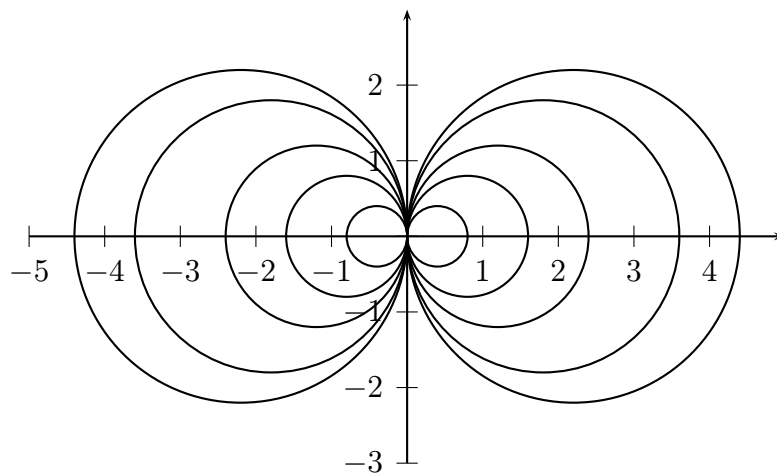
Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $z + tz' = \frac{y^2 - 1}{2y}$, a po separaci proměnných máme

$$\frac{2z dz}{z^2 + 1} = -\frac{dt}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Vidíme, že obecným řešením je jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$. $\square$



Obrázek 1: Jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$, daná rovnicí $(t - C)^2 + y^2 = C^2$.

Úloha 4.4. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y^2 dt + (t^2 - ty) dy$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
 y^2 dt + (t^2 - ty) dy &= 0 \quad | : dt \\
 y^2 + (t^2 - ty) \frac{dy}{dt} &= 0 \\
 y' &= \frac{-y^2}{t^2 - ty}
 \end{aligned}$$

$t^2 - ty \neq 0$
 $t(t-y) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ y \neq t \end{cases}$

Je homogenní

Případ $y=t$:
 $t^2 + (t^2 - t^2) \cdot 1 = t^2 \neq 0$
 nejde o řešení DR

$$y' = \frac{y^2}{ty - t^2} \cdot \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{y}{t}\right) - 1}$$

Substituce: $z = \frac{y}{t}$
 $zt = y$
 $y' = z' t + z$

Dosadíme!

$$z' t + z = \frac{z^2}{z-1} \quad , \quad z' t = \frac{z^2}{z-1} - z$$

$$z' t = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} \quad , \quad z' t = \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dt} t = \frac{z}{z-1} \quad | : t, : \frac{z}{z-1} \cdot dt$$

$$\frac{z-1}{z} dz = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{z-1}{z} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$e^{(z - \ln|z|)} = e^{(\ln|t| + \ln C_1)}, \quad C_1 > 0$$

$$\frac{e^z}{|z|} = C_1 \cdot |t|, \quad \frac{e^z}{z} = C_2 t, \quad C_2 \neq 0$$

Dosadíme! $\frac{e^{\frac{y}{t}}}{\frac{y}{t}} = C_2 t, \quad y = C_3 e^{\frac{y}{t}}, \quad C_3 \neq 0$

$t \neq 0$ již máme ↑
 $z \neq 0$ jde o řešení?
 $z=0: L=0 \cdot t=0 \quad L=P$
 $P=\frac{0}{0-1}=0 \quad L=P$
 Ano, $z=0$ je řeš. DR.
 $\Rightarrow y=0$ je řeš. DR.
 $\downarrow C=0$

$$y = C e^{\frac{y}{t}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

□

Domácí cvičení

Úloha 4.5. Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$(t+y) dt - (t-y) dy = 0 \quad \left[\arctg \frac{y}{t} = \ln \sqrt{t^2 + y^2} + C \right].$$

Úloha 4.6. Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$(t^2 + ty + y^2) dt = t^2 dy \quad [y = t \operatorname{tg}(\ln Ct)].$$

KMA/M3: Přednáška č. 5

c) Rovnice typu $y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

TATO SEKCE C) JE NEPOVINNÁ:-).

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní. Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y , tak nezávisle proměnnou t :

$$y = z + r$$

$$t = \tau + s.$$

Koeficienty r, s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynuly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $dy = dz$, $dt = d\tau$ (tedy $\frac{dz}{d\tau} = \frac{dy}{dt}$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 = 0.$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení r, s .

Úloha 4.7. Řešte rovnici $y' = \frac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$5s - 2r - 1 = 0,$$

$$2s - r + 1 = 0,$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7$, $s = 3$. Substituce $y = z + 7$, $t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \quad \text{neboli} \quad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\frac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \quad \text{odkud} \quad u'\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2-u}{u^2-4u+5}du = \frac{d\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u-4}{u^2-4u+5}du = -2\frac{d\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2-4u+5) = -2\ln|\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde } C_1 \neq 0,$$

tedy

$$u^2-4u+5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \frac{z}{\tau}$, $z = y-7$, $\tau = t-3$, je $u = \frac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2}, \quad \text{kde } C \neq 0.$$

□

d) Snížení řádu diferenciální rovnice

Pokud v diferenciální rovnici n -tého řádu chybí $y, y', \dots, y^{(n-2)}$, lze ji substitucí $z = y^{(n-1)}$ převést na diferenciální rovnici 1. řádu.

Úloha 4.8. Řešte rovnici $ty'' + (t-1)y' = 0$.

Řešení. V zadané rovnici 2. řádu chybí y , takže položíme $y' = z$. Pak $y'' = z'$ a daná rovnice přejde na diferenciální rovnici 1. řádu

$$tz' + (t-1)z = 0$$

(snížili jsme řád rovnice), kterou řešíme separací proměnných. Pro $z \neq 0, t \neq 0$ máme po separaci

$$\frac{dz}{z} = \frac{1-t}{t} dt$$

a po integraci

$$\ln |z| = \ln |t| - t + \ln C_1', \quad \text{kde } C_1' > 0.$$

Po úpravách dostáváme obecné řešení upravené rovnice

$$z = t e^{-t} C_1''$$

a z toho po návratu k původní proměnné

$$y' = C_1'' t e^{-t},$$

kde C_1'' je libovolná konstanta. Po návratu k původní proměnné y máme $y' = C_1'' t e^{-t}$, tedy $y = C_1'' \int t e^{-t} dt$, odkud použitím metody per partes dostaneme

$$y = C_1(t+1)e^{-t} + C_2,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. □

Vidíme, že zde obecné řešení diferenciální rovnice 2. řádu skutečně závisí na dvou integračních konstantách.

Úloha 4.9. Řešte $y'' = \frac{y'}{x}$.

Řešení. Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'' \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Separace proměnných ($z \equiv 0$ je řešením):

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln |z| = \ln |x|, \quad z = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y' = Cx, \quad y = \frac{C}{2}x^2 + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Řešení ($C_2 = \frac{C}{2}$):

$$y = C_1 + C_2 x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 4.10. Řešte počáteční úlohu:

$$y''' = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Řešení. Substitute:

$$z = y'', \quad z' = y''', \quad z' = e^{2x}, \quad z = \frac{1}{2} e^{2x} + C_4, \quad C_4 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + C_4.$$

Substitute:

$$z = y', \quad z' = y'', \quad z' = \frac{1}{2} e^{2x} + C_4, \quad z = \frac{1}{4} e^{2x} + C_4 x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + C_4 x + C_2, \quad y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{C_4}{2} x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení ($C_1 = \frac{C_4}{2}$):

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínky:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad y' = \frac{1}{4} e^{2x} + 2C_1 x + C_2, \quad y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + 2C_1.$$

$$\begin{array}{lcl} y(0) = 1 & \left| \begin{array}{l} \frac{1}{8} e^0 + C_1 0 + C_2 0 + C_3 = 1 \\ \frac{1}{4} e^0 + 2C_1 0 + C_2 = -1 \\ \frac{1}{2} e^0 + 2C_1 = 0 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} \frac{1}{8} + C_3 = 1 \\ \frac{1}{4} + C_2 = -1 \\ \frac{1}{2} + 2C_1 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Tudíž:

$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Partikulární řešení:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}.$$

□

Domácí cvičení

Úloha 4.11. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$a) \quad y''' = y''' \quad \left[3y = (C_1 - 2t)^{\frac{3}{2}} + C_2 t + C_3 \right],$$

$$b) \quad ay''' = y'', \quad \text{kde } a > 0 \quad \left[y = C_1 e^{\frac{t}{a}} + C_2 t + C_3 \right].$$

KMA/M3: Přednáška č. 6

5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární rovnice je rovnice tvaru

$$(nlr) \quad y' + p(t)y = q(t).$$

Funkce $q(t)$ se někdy nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme lineární rovnici *nehomogenní*, v opačném případě máme rovnici

$$(hlr) \quad y' + p(t)y = 0$$

homogenní. Pokud v (nlr) i (hlr) je $p(t)$ jedna a táž funkce, nazývá se (hlr) *příslušná homogenní rovnice* (tj. příslušná k dané rovnici nehomogenní).

Lineární rovnice jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles ad.) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na rovnice lineární.

Existuje několik metod, jak řešit lineární rovnice; lze je například řešit i vzorcem. Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce. Nejznámější je *metoda variace konstanty*. Tato metoda spočívá ve třech krocích:

Metoda variace konstanty:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K .
2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K' .
3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení lineární rovnice metodou variance konstanty si ukážeme na příkladě.

Úloha 5.1. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$.

Řešení. Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je t , příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \frac{dy}{dt}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\frac{dy}{y} = dt$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot e^t$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot e^t + K \cdot e^t - K \cdot e^t = t;$$

dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme

$$K' = t \cdot e^{-t}.$$

3. Integrujeme:

$$K = \int t e^{-t} dt = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^t$ a dostáváme

$$y = (C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \cdot e^t.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = C \cdot e^t - t - 1.$$

□

Poznámka 5.2. Pro $C = 0$ odsud dostáváme partikulární řešení $Y = -t - 1$.

Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní. Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.

Úloha 5.3 (cvičení). Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y \cos t = \sin 2t$.

Řešení. Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y \cos t = 0$.

1. $y' = \frac{dy}{dt}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\frac{dy}{y} = \cos t dt$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru

$$y = K \cdot e^{-\sin t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot e^{-\sin t} + K \cdot e^{-\sin t} (-\cos t) + K \cdot e^{-\sin t} \cos t = \sin 2t;$$

dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme

$$K' = e^{\sin t} \sin 2t.$$

3. Integrujeme:

$$\begin{aligned} K &= \int e^{\sin t} \sin 2t \, dt = \int e^{\sin t} 2 \sin t \cos t \, dt = \left[\begin{array}{ll} u = 2 \sin t & v' = e^{\sin t} \cos t \\ u' = 2 \cos t & v = e^{\sin t} \end{array} \right] \\ &= 2 e^{\sin t} \sin t - \int 2 e^{\sin t} \cos t \, dt = 2 e^{\sin t} \sin t - 2 e^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2 e^{\sin t} \sin t - 2 e^{\sin t} + C) \cdot e^{-\sin t}.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = 2(\sin t - 1) + C \cdot e^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 5.4. Řešte $y' + 2ty = 2t e^{-t^2}$.

Řešení. Řešení HÚ:

$$y = C e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení NHÚ:

$$y = C e^{-t^2} + t^2 e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Domácí cvičení

Úloha 5.5. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice:

$$y' + 2y = t^2 + 2t. \quad \left[y = C e^{-2t} + \frac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1) \right]$$