

Řešení úloh na domácí procvičení

1 Řešení homogenních diferenciálních rovnic

Opět je třeba připomenout, že nejdůležitější je rozpoznat druh diferenciální rovnice, znát postup řešení tohoto typu DR a následně jej umět použít. Vyjádření (úprava) řešení (zejména pokud nejde o vyjádření explicitní) je záležitost „druhotná“. Proto „Vaše“ řešení nemusí vždy odpovídat uvedenému řešení.

Úloha 1.1. Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$(t+y)dt - (t-y)dy = 0 \quad \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{t} = \ln \sqrt{t^2 + y^2} + C \right].$$

Řešení. Tvar ze zadání $(t+y)dt - (t-y)dy = 0$ upravíme na základní tvar:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t-y}, \quad \text{a tedy} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}},$$

kde je třeba splnit podmínku $t-y \neq 0$, tedy $y \neq t$.¹

Jde tedy o homogenní rovnici, u které provádíme substituci

$$z = \frac{y}{t}, \quad zt = y, \quad z't + z = y'.$$

Dosadíme

$$z't + z = \frac{1+z}{1-z}, \quad z't = \frac{1+z}{1-z} - z, \quad z't = \frac{1+z-z+z^2}{1-z}, \quad z't = \frac{1+z^2}{1-z},$$

čímž dostáváme rovnici vhodnou k separaci proměnných:

$$\frac{dz}{dt}t = \frac{1+z^2}{1-z}, \quad \frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{dt}{t},$$

kde podmínka $1+z^2 \neq 0$ je automaticky splněna, neboť $1+z^2 \geq 1$.

Integrujeme:

$$\int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dt}{t}, \quad \int \frac{1}{1+z^2} dz - \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1+z^2} dz = \int \frac{dt}{t},$$
$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln |1+z^2| = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

¹Zde prověříme situaci $y = t$. Dosadíme do původního zápisu:

$$L = (t+t)dt - (t-t)dy = 2t dt - 0 dy = 2t dt \neq 0 = P,$$

tedy nejde o řešení.

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) + \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg} z = \ln \sqrt{1 + z^2} + \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg} z = \ln \left[\sqrt{1 + z^2} \cdot |t| \right] + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg} z = \ln \left[\sqrt{(1 + z^2) \cdot t^2} \right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení ze substituční rovnice:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{t} = \ln \left[\sqrt{\left(1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2\right) \cdot t^2} \right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Obor hodnot funkce arctg je $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, což je třeba zohlednit i na pravé straně. $\square$

Úloha 1.2. Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$(t^2 + ty + y^2) dt = t^2 dy \quad [y = t \operatorname{tg}(\ln Ct)].$$

Řešení. Tvar ze zadání $(t^2 + ty + y^2) dt = t^2 dy$ upravíme na základní tvar:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + ty + y^2}{t^2}, \quad \text{a tedy} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2}{1}.$$

Jde tedy o homogenní rovnici, u které provádíme substituci

$$z = \frac{y}{t}, \quad zt = y, \quad z't + z = y'.$$

Dosadíme

$$z't + z = 1 + z + z^2, \quad z't = 1 + z + z^2 - z, \quad z't = 1 + z^2,$$

čímž dostáváme rovnici vhodnou k separaci proměnných:

$$\frac{dz}{dt} t = 1 + z^2, \quad \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{dt}{t},$$

kde podmínka $1 + z^2 \neq 0$ je automaticky splněna, neboť $1 + z^2 \geq 1$.

Integrujeme:

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{dt}{t}, \quad \operatorname{arctg} z = \ln |t| + \ln C, \quad C > 0$$

$$\operatorname{arctg} z = \ln C |t| + \operatorname{tg}, \quad z = \operatorname{tg} \ln C |t|.$$

Po dosazení ze substituční rovnice:

$$\frac{y}{t} = \operatorname{tg} \ln C |t|, \quad y = t \operatorname{tg} \ln C |t|, \quad C > 0.$$

Poznámka: Obor hodnot funkce arctg je $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, což je třeba zohlednit i na pravé straně.

Zde bylo možno (oproti předchozímu příkladu) explicitně vyjádřit řešení y , a tak jsme „odstranili“ arctg pomocí k ní inverzní funkce tg . $\square$

Úloha 1.3. Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$y' = \frac{y^2}{t^2} - 2 \quad [y - 2t = Ct^3(y + t)].$$

Řešení. Tvar ze zadání $y' = \frac{y^2}{t^2} - 2$ upravíme na vhodnější tvar:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{t}\right)^2 - 2,$$

ze kterého je již vidět, že jde o homogenní DR, neboť na pravé straně je funkce v proměnné $\frac{y}{t}$.

Provedeme substituci

$$z = \frac{y}{t}, \quad zt = y, \quad z't + z = y'.$$

Dosadíme

$$z't + z = z^2 - 2, \quad z't = z^2 - z - 2,$$

čímž dostáváme rovnici vhodnou k separaci proměnných:

$$\frac{dz}{dt}t = z^2 - z - 2, \quad \frac{dz}{z^2 - z - 2} = \frac{dt}{t},$$

kde podmínka $z^2 - z - 2 \neq 0$ je splněna pro $z \neq -1$ a $z \neq 2$, přičemž funkce $z = -1$ a $z = 2$ jsou řešeními.²

Integrujeme:

$$\int \frac{dz}{z^2 - z - 2} = \frac{dt}{t}, \quad -\frac{1}{3} \int \frac{dz}{z + 1} + \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z - 2} = \frac{dt}{t},$$

$$-\frac{1}{3} \ln |z + 1| + \frac{1}{3} \ln |z - 2| = \ln |t| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| = \ln C_1 |t|, \quad C_1 > 0,$$

$$\ln \sqrt[3]{\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right|} = \ln C_1 |t|, \quad C_1 > 0,$$

$$\sqrt[3]{\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right|} = C_1 |t|, \quad C_1 > 0,$$

$$\left| \sqrt[3]{\frac{z - 2}{z + 1}} \right| = C_1 |t|, \quad C_1 > 0,$$

$$\sqrt[3]{\frac{z - 2}{z + 1}} = C_2 t, \quad C_2 \neq 0,$$

$$\frac{z - 2}{z + 1} = C_3 t^3, \quad C_3 \neq 0.$$

²Pro $z = -1$ máme $L = 0 \cdot t = 0$, $P = 0$, a tak jde o řešení. Po zpětném dosazení dostáváme $\frac{y}{t} = -1$, $y = -t$.

Pro $z = 2$ je to obdobné: $L = 0 \cdot t = 0$, $P = 0$. Po zpětném dosazení: $\frac{y}{t} = 2$, $y = 2t$.

Do zápisu „přidáme“ řešení $z = 2$ (povolíme nulu u integrační konstanty):

$$\frac{z-2}{z+1} = Ct^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zbývá připsat řešení $z = -1$ a zpětně dosadit:

$$\left[\frac{z-2}{z+1} = Ct^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad z = -1 \right],$$

$$\left[\frac{\frac{y}{t}-2}{\frac{y}{t}+1} = Ct^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = -t \right],$$

$$\left[\frac{y-2t}{y+t} = Ct^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = -t \right].$$

□