Zápočtová písemka — 21. 11. 2011 — M3 — A —

1. Sestrojte směrové pole DR $y' = \frac{t}{y}$ pomocí izoklin. Pokuste se načrtnout graf nějakého řešení.

2. Nalezněte řešení počáteční úlohy $y' - 2xy = 3x$, $y(0) = e$.

3. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $yy' = \frac{1+t^2}{y}$.

4. Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

(1) $y' = \frac{t}{y}$, $\frac{t}{y} = c$, $y = \frac{t}{c}$, $y = \frac{1}{c}t + 0$

(1) $y \neq 0$ pro $c = 0$ (2) $c \neq 0$

$\frac{t}{y} = 0 \Rightarrow t = 0$

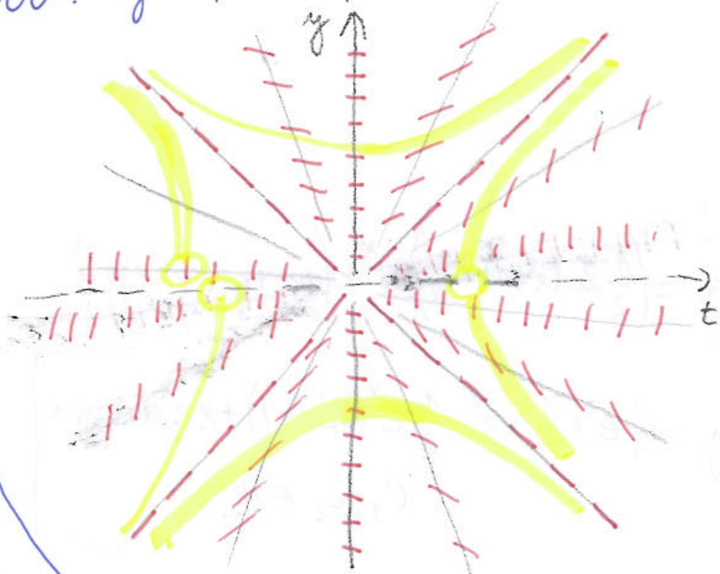
(1) $y \neq 0 \Rightarrow$ mimo osu t

(2) $c = 0 \Rightarrow t = 0$ $(\wedge y \neq 0) \Rightarrow$ na ose y (bez počátku)

je směrnice lineárního elementu 0

$c = 1$: $y = t$, $c = 2$: $y = \frac{t}{2}$, $c = -1$: $y = -t$

$c = -2$: $y = -\frac{1}{2}t$, $c = 1000$: $y = 0{,}001t$, $c = -1000$: $y = -0{,}001t$



(2) LDR$_{1.ř.}$

HÚ: $y' - 2xy = 0$

$y = C \cdot e^{-\int(-2x)dx} = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

NHÚ: variace konstanty

$y = k(x)e^{x^2}$, $y' = k'(x) \cdot e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}$

$k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2} - 2xk(x)e^{x^2} = 3x$

$k'(x)e^{x^2} = 3x$, $k'(x) = 3xe^{-x^2}$,

$k(x) = \int 3xe^{-x^2}dx = \left[\begin{matrix} x^2 = u \\ 2xdx = du \end{matrix}\right] = \frac{3}{2}\int e^{-x^2} \cdot 2x dx = \frac{3}{2}\int e^{-u}du = -\frac{3}{2}e^{-u} + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$

$y = k(x)e^{x^2} = \left(-\frac{3}{2}e^{-x^2} + C\right)e^{x^2} = -\frac{3}{2} + C \cdot e^{x^2}$

OŘ $y = -\frac{3}{2} + C \cdot e^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

Počáteční úloha $y(0) = e$

$-\frac{3}{2} + C \cdot e^0 = e$

$C = e + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{3}{2} + \left(e + \frac{3}{2}\right)e^{x^2}$

partikulární řešení

③ $y \cdot y' = \frac{1+t^2}{y}$, $(y \neq 0)$, $y' = \frac{1+t^2}{y^2}$ → separace

$\frac{dy}{dt} = \frac{1+t^2}{y^2}$ → $y^2\,dy = (1+t^2)\,dt$

$\int y^2\,dy = \int (1+t^2)\,dt$, $\frac{y^3}{3} = t + \frac{t^3}{3} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

$y^3 = 3t + t^3 + C$, $(C = 3 \cdot C_1 \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{3t + t^3 + C},\ C \in \mathbb{R}}$$

④ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ → LDR$_{2.ř.}$

HÚ: $y'' - 2y' + y = 0$ ChR: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

ChK $\lambda_{1,2} = 1$

OŘHÚ: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

NHÚ: variace konstant!

$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$, kde

$C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0$

$C_1'(x) e^x + C_2'(x)(e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{e^x}{x^2+1} & (1+x)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x}{x^2+1} \cdot e^{2x}}{e^{2x}(1+x-x)}$$

$C_1'(x) = -\frac{x}{x^2+1}$

$\underline{C_1(x)} = -\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \underline{-\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C_1}$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{\frac{e^{2x}}{x^2+1}}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2+1}$$

$\underline{C_2(x)} = \int \frac{dx}{x^2+1} = \underline{\operatorname{arctg} x + C_2}$

$y = \left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1\right) e^x + \left(\operatorname{arctg} x + C_2\right) x e^x$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2} e^x \ln(x^2+1) + x e^x \operatorname{arctg} x,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$