Zápočtová písemka — 21. 11. 2011 — M3 — B —

1. Sestrojte směrové pole DR $y' = \dfrac{y}{t}$ pomocí izoklin. Pokuste se načrtnout graf nějakého řešení.

2. Nalezněte řešení počáteční úlohy $y' + 2xy = -3x$, $y(0) = e$.

3. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $yy' = \dfrac{1-2t}{y}$.

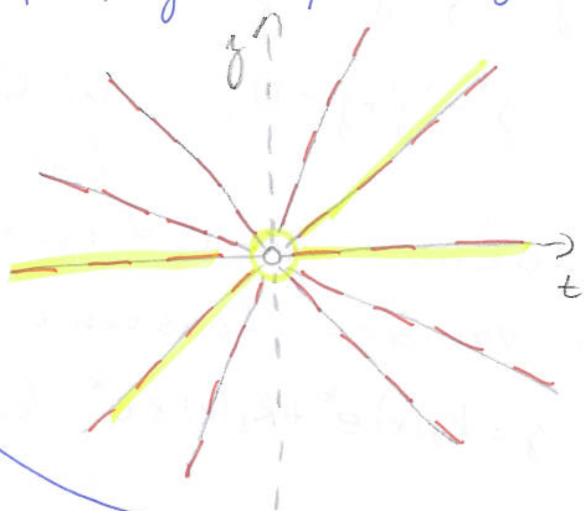
4. Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

(1) $y' = \dfrac{y}{t}$, $\dfrac{y}{t} = C \rightarrow y = C \cdot t + 0$, $C \in \mathbb{R}$

$t \neq 0 \rightarrow$ mimo osu y

$C = 0 \rightarrow y = 0$ (osa t bez 0)

$C = 1 \rightarrow y = t$, $C = 2 \rightarrow y = 2t, \dots$



(2) $y' + 2xy = -3x$

LDR 1.ř.

HÚ: $y' + 2xy = 0$

$y = C \cdot e^{-\int 2x\,dx} = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$

NHÚ: variace konstanty

$y = K(x)\, e^{-x^2}$, $y' = K'(x)\, e^{-x^2} - 2x\, K(x)\, e^{-x^2}$

$K'(x)\, e^{-x^2} - 2x\, K(x)\, e^{-x^2} + 2x\, K(x)\, e^{-x^2} = -3x$

$K'(x)\, e^{-x^2} = -3x$, $K'(x) = -3x\, e^{x^2}$, $K(x) = \int -3x\, e^{x^2} dx$

$K(x) = -\frac{3}{2} \int 2x\, e^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{array} \right] = -\frac{3}{2} \int e^{u} du = -\frac{3}{2} e^{u} + C$

$K(x) = -\frac{3}{2} e^{x^2} + C$

$\underline{y} = K(x) \cdot e^{-x^2} = \left(-\frac{3}{2} e^{x^2} + C\right) \cdot e^{-x^2} = \underline{-\frac{3}{2} + C \cdot e^{-x^2}}$

Poč. úl.: $y(0) = e$, $-\frac{3}{2} + C \cdot e^{0} = e$

$C = e + \frac{3}{2}$

$$\underline{\underline{y = -\frac{3}{2} + \left(e + \frac{3}{2}\right) e^{-x^2}}}$$

③ $y \cdot y' = \dfrac{1-2t}{y}$, $y \neq 0$

$y' = \dfrac{1-2t}{y^2}$ separace

$y^2 dy = (1-2t)dt$, $\int y^2 dy = \int (1-2t)\,dt$,

$\dfrac{y^3}{3} = t - t^2 + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

$y^3 = 3t - 3t^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, $C = 3 \cdot C_1$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C},\ C \in \mathbb{R}}$$

$y \neq 0$

④ $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ LDR 2.ř.

HÚ: $y'' - 2y' + y = 0$, CHR: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

ChK: $\lambda_{1/2} = 1$

OŘHÚ: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$

NHÚ: variace konstant

$y = K_1(x) e^x + K_2(x) x e^x$, kde

$K_1'(x) e^x + K_2'(x) x e^x = 0$

$K_1'(x) e^x + K_2'(x)[e^x + x e^x] = \dfrac{e^x}{x}$

$$K_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ e^x/x & e^x(1+x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}(1+x-x)} = -1$$

$$K_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x}$$

$K_1(x) = \int -1 \cdot dx = -x + C_1$

$K_2(x) = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$

$y = (-x + C_1) e^x + (\ln|x| + C_2) x e^x$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + \ln|x| \cdot x e^x,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$