Zápočtová písemka — 1. 12. 2011 — M3 — C — VZOR

1. Nalezněte řešení počáteční úlohy $y' + 2xy = 3x, \quad y(1) = \pi.$

2. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' = 2\frac{y'}{t}.$

3. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y' = x.$

4. U následující rovnice vyřešte homogenní úlohu a potom popište, jak by se řešila nehomogenní úloha metodou neurčitých koeficientů (zapište neurčitý tvar řešení, ale koeficienty již nemusíte počítat):

$$y'' - 2y' + 2y = (x-1) + e^{2x}\sin x + e^x \cos x.$$

1 LDR 1. ř. HÚ $y' + 2xy = 0$

$$y = C\cdot e^{-\int 2x\,dx} = C\cdot e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

NHÚ: variace konstanty C

$$y = K(x)\cdot e^{-x^2}, \quad y' = K'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2}$$

dosazení:

$$K'(x)\,e^{-x^2} \underline{-2x\,K(x)\,e^{-x^2}} + \underline{2x\,K(x)\,e^{-x^2}} = 3x$$

$$K'(x)\,e^{-x^2} = 3x \quad | \cdot e^{x^2}$$

$$K'(x) = 3x\,e^{x^2}$$

$$K(x) = \int 3x\,e^{x^2}dx = \left[\begin{matrix} w = x^2 \\ dw = 2x\,dx \end{matrix}\right] = \frac{3}{2}\int e^{x^2}2x\,dx = \frac{3}{2}\int e^{w}dw = \frac{3}{2}e^{w} + C =$$

$$= \frac{3}{2}e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

OŘ NHÚ: $\boxed{y = \left(\frac{3}{2}e^{x^2} + C\right)\cdot e^{-x^2} = \frac{3}{2} + C\cdot e^{-x^2}}$

PÚ: $y(1) = \pi \qquad \frac{3}{2} + C\cdot e^{-1} = \pi, \quad Ce^{-1} = \pi - \frac{3}{2}$

$$C = e\left(\pi - \frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{3}{2} + \left(e\cdot\left(\pi - \frac{3}{2}\right)\right)\cdot e^{-x^2}}$$

② Snížení řádu DR

$y'' = 2\frac{y'}{t}$, $t \neq 0$ Subst.: $z = y'$, $z' = y'' \to z' = 2\frac{z}{t}$

separace proměnných $\frac{dz}{dt} = 2\frac{z}{t}$, $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dt}{t}$ $\boxed{z \neq 0}$

$z \equiv 0$ je řeš.

$C_2 = 0$

$\ln|z| = 2\ln|t| + \ln C_1$, $C_1 > 0$

$\ln|z| = \ln t^2 + \ln C_1$

$|z| = C_1 \cdot t^2$

$z = C_2 \cdot t^2$, $C_2 \neq 0$

$z = C \cdot t^2$, $C \in \mathbb{R}$

$(z = y')$: $y' = C \cdot t^2$

$y = \int C \cdot t^2 dt$

$y = C \cdot \frac{t^3}{3} + \bar{C}$

$$\boxed{y = \bar{\bar{C}} t^3 + \bar{C},\ \bar{C}, \bar{\bar{C}} \in \mathbb{R}}$$

$t \neq 0$

③ $y'' - y' = x$ LDR 2.ř.

HÚ: $y'' - y' = 0$ ChR: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

OŘ: $\bar{y} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{1 \cdot x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

NHÚ: Metoda neurč. koef.

$f(x) = x = x \cdot e^{0 \cdot x} \Rightarrow N = 1$

$Y = x^1 \cdot (Ax + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax^2 + Bx$, $Y' = 2Ax + B$, $Y'' = 2A$

$Y'' - Y' = x$, $2A - (2Ax + B) = x$, $(2A - B) - 2Ax = 1 \cdot x + 0$

$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$2A - B = 0 \to 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = B$

$B = -1$

$Y = -\frac{1}{2}x^2 - x$

OŘ: $$\boxed{y = \bar{y} + Y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x,\ C_{1,2} \in \mathbb{R}}$$

Zápočtová písemka — 1. 12. 2011 — M3 — C —

1. Nalezněte řešení počáteční úlohy $y' + 2xy = 3x, \quad y(1) = \pi.$

2. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' = 2\dfrac{y'}{t}.$

3. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y' = x.$

4. U následující rovnice vyřešte homogenní úlohu a potom popište, jak by se řešila nehomogenní úloha metodou neurčitých koeficientů (zapište neurčitý tvar řešení, ale koeficienty již nemusíte počítat):

$$y'' - 2y' + 2y = (x-1) + e^{2x}\sin x + e^{x}\cos x.$$

(4) LDR 2. ř.

HÚ $y'' - 2y' + 2y = 0$ ChR: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $D = 4 - 8 = -4$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

OŘHÚ: $\bar{y} = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x, \quad C_{1/2} \in \mathbb{R}$

NHÚ: Metoda neurčitých koeficientů

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{f_1(x)} + \underbrace{e^{2x}\sin x}_{f_2(x)} + \underbrace{e^{x}\cos x}_{f_3(x)}$$

1) $y'' - 2y' + 2y = (x-1)\cdot e^{0x} \rightarrow Y_1 = Ax + B$

2) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\sin x \rightarrow Y_2 = C\cdot e^{2x}\sin x + D\cdot e^{2x}\cos x = e^{2x}(C\sin x + D\cos x)$

3) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\cos x \rightarrow Y_3 = x\left(e^x(E\sin x + F\cos x)\right)$

OŘ: $y = \bar{y} + Y_1 + Y_2 + Y_3$

[Nad rámec, po dosazení, dostaneme
$A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{5}$, $D = -\frac{2}{5}$, $E = \frac{1}{2}$, $F = 0$, a tak
OŘ: $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + \frac{1}{2}x + e^{2x}\left(\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x\right) + x e^x \cdot \frac{1}{2}\sin x$]