

Matematika 2 — Derivace funkce

Jiří Fišer

KMA, PřF UP Olomouc

ZS09

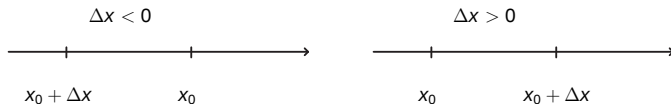
Derivace funkce

- Patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy.
- Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

Pojem derivace funkce

Mějme funkci f , která je definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 .

- Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx
- (Δx je *přírůstek nezávisle proměnné*),
- dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x$ ($\in U(x_0)$);
 - ▶ pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo
 - ▶ a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0 .



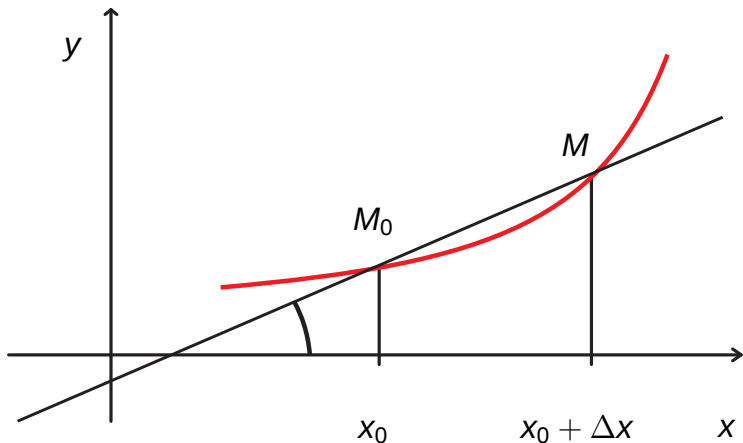
Obrázek: Přírůstky nezávisle proměnné.

Pojem derivace funkce

- Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0 + \Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
 - ▶ Δy je tzv. *přírůstek funkce*.
 - ▶ Podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je tzv. *diferenciální podíl*;
 - ▶ jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce,
 - ▶ tj. $\operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, který svírá sečna M_0M s osou x .

Pojem derivace funkce

Doplňte do obrázku označení: α , Δx , a Δy .



Obrázek: Sečna grafu.

Pro spojitou funkci f platí

$$\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta y \rightarrow 0,$$

takže pro $\Delta x \rightarrow 0$ je diferenciální podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Definice

Říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 derivaci**, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme **derivace funkce f v bodě x_0** a značíme ji $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

Geometrický význam derivace funkce v bodě

$f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0 , tj. $\operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel který svírá tečna v bodě M_0 s osou x .

Fyzikální význam derivace v bodě

Je-li zákon dráhy $s = s(t)$, pak diferenciální podíl $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ znamená okamžitou rychlost.

Nevlastní derivace

Jestliže limita diferenciálního podílu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je pro $\Delta x \rightarrow 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava).

Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

Derivace jako funkce

Definice

Má-li funkce f derivaci v každém bodě x nějaké množiny M , říkáme, že **má derivaci na množině** M ; značíme ji f' nebo $f'(x)$.

- Derivace funkce na množině M je opět funkce.
- Například derivací funkce $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ je funkce $y = 2x$.
- Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0 , stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x .

Přehled označení derivací

v bodě:

jako funkce:

původ označení:

$$f'(x_0)$$

$$y', f', f'(x)$$

Lagrange

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x))$$

Leibniz

$$Df(x_0)$$

$$Dy, Df(x)$$

Cauchy

- Každé z těchto označení má své výhody.
- V Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, což je vhodné pro manipulace s funkcemi složenými a inverzními;
- Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme f'_u .

Věta (vztah mezi derivací a spojitostí)

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.

Princip důkazu.

Dokážeme, že platí $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$. □

Vlastnosti derivací

Věta (základní vlastnosti derivací)

Nechť funkce $u = f(x)$, $v = g(x)$ mají na množině M derivace $u' = f'(x)$, $v' = g'(x)$ a $c \in \mathbb{R}$.

Pak funkce $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a pro $g(x) \neq 0$ i $\frac{f}{g}$ mají na M derivace a platí:

- ❶ $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
- ❷ $(u + v)' = u' + v'$, $(u - v)' = u' - v'$,
- ❸ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
- ❹ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Důkaz.

Provádí se podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti. □

Derivace složené funkce

Věta

Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ a necht'

- 1) funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě x derivaci $\varphi'(x)$,
- 2) funkce $y = f(u)$ má v odpovídajícím bodě $u (= \varphi(x))$ derivaci $f'(u)$.

Pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě x derivaci

$$(f \circ \varphi)'(x) = \left(f'(u) \cdot \varphi'(x) \right) = (f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x).$$

Při označení podle Leibnize:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Derivace inverzní funkce

Věta

Nechť f je ryze monotónní na intervalu J a má tu derivaci f' . Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci na $f(J)$ a platí

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Při označení podle Leibnize: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$

Úloha

Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.

Řešení.

- Pomocné vztahy:

$$y = \arcsin x, \sin y = x, \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

- $(\arcsin x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$

- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$



Přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí

- $(c)' = 0$ (derivace konstanty);
- $(x^m)' = mx^{m-1}$ (platí pro libovolné $m \neq 0$); zvláště $(x)' = 1$;
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; zejména $(e^x)' = e^x$;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; zejména $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$;

Přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2};$

- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{coth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x};$

- $(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad (\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$

Úloha

Určete derivaci funkce $y = (\cos x)^{\sin x}$ pro x v 1. kvadrantu.

Řešení.

$$y = (\cos x)^{\sin x} = e^{\ln(\cos x)^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x)^{\sin x} = \frac{d}{dx} e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \right]$$



Diferenciál funkce

Řešíme problém: funkci f v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí g , tj. nalézt takovou lineární funkci g , aby platila podmínka

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Označme $x = x_0 + h$; zřejmě $g(x) = f(x_0) + ah$, takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Z definice funkce $\omega(h)$ plyne, že přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f(x_0) (= f(x_0 + h) - f(x_0)) = ah + \omega(h).$$

Definice

Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci dh , nazýváme **diferenciál funkce f v bodě x_0** , označujeme jej $df(x_0)$ a funkci, která má diferenciál v bodě x_0 , nazýváme **diferencovatelnou v bodě x_0** . Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny M , nazýváme **diferencovatelnou na množině M** .

Věta (existence a jednoznačnost diferenciálu)

Funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \iff$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciál $df(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je pak jednoznačně určen vzorcem

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h,$$

kde $h \in \mathbb{R}$ je přírůstek nezávisle proměnné.

- Předchozí věta tedy říká, že výroky
 - ▶ „ f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci“
 - ▶ a „ f je v bodě x_0 diferencovatelná“jsou ekvivalentní, znamenají totéž.
- U funkcí více proměnných je tomu jinak.
- Místo h používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení Δx nebo dx a název *diferenciál nezávisle proměnné*.
- Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce $y = x$ je $dx = 1 \cdot h (= 1 \cdot \Delta x)$.
- Diferenciál funkce pak též zapisujeme $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$.
- Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

Definice

Diferenciálem funkce f v bodě x_0 nazýváme výraz

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx,$$

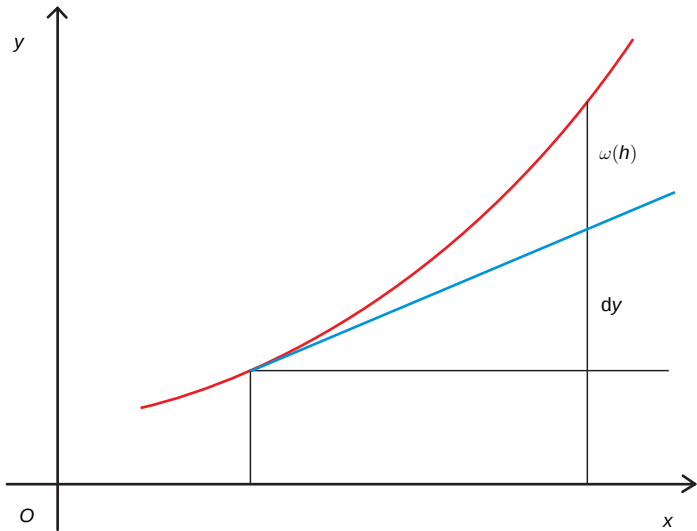
kde $dx (= \Delta x)$ je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné.

Diferenciálem funkce f na množině M nazýváme funkci

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

kde $x \in M$.

- Ze vztahu $dy = f'(x) \cdot dx$ vidíme,
- že Leibnizův symbol $\frac{dy}{dx}$ pro derivaci funkce
- je skutečným zlomkem — podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné.
- Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.



Obrázek: Geometrický význam diferenciálu funkce.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu v *přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Úloha

Pomocí diferenciálu funkce vypočtete přibližnou hodnotu $\sqrt{0,982}$.

Řešení.

$$\sqrt{0,982} = f(0,982) = f(1 - 0,018) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\sqrt{0,982} \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0,018) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,018) = 0,991.$$



Užití diferenciálu *při odhadu chyb* je založeno na tom, že když

- h (tedy dx) položíme rovno absolutní chybě měření,
- udává df přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty $y = f(x)$.

Úloha

Počítáme objem koule, jejíž průměr x jsme změřili s chybou δx . Určete chybu výsledku.

Řešení.

Vzorec pro objem koule o poloměru r , resp. průměru x :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Pokud x měříme s chybou δx , dostaneme při označení $\hat{x} = x + \delta x$:

$$\hat{V} = \frac{1}{6}\pi \hat{x}^3 = \frac{1}{6}\pi (x + \delta x)^3 \approx \frac{1}{6}\pi x^3 + \left[\frac{1}{6}\pi x^3\right]' \delta x = V + \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right] \delta x = V + \delta V.$$

Přibližná chyba výsledku je tedy $\delta V = \frac{1}{2}\pi x^2 \delta x$, přičemž přibližná relativní chyba výsledku je

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2 \delta x}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \frac{\delta x}{x},$$

a tedy relativní chyba výsledku je rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru.



Derivace vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -\sin x$.

Definice

Má-li funkce f' v bodě x (na množině M) derivaci $(f')'$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme **derivace druhého řádu (druhá derivace)** funkce f .

Podobně **derivaci n -tého řádu (n -tou derivaci)** $f^{(n)}$ definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Označení podle Leibnize: $\frac{d^2f}{dx^2}$ (čti „d dvě f podle dx na druhou“),

$$\frac{d^2f}{dy^2}, \frac{d^2}{dx^2}(f(x)), \frac{d^nf}{dx^n}, \left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{x=x_0}, \text{ apod.}$$

Označení podle Cauchyho: D^2f , D^ny , apod.

Úloha

Určete všechny derivace funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Úloha

Určete 2. derivaci funkce $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Některé vzorce pro n -tou derivaci elementárních funkcí

1) Funkce $e^x : \forall n \in \mathbb{N}$ je $(e^x)^{(n)} = e^x$;

podobně pro funkci a^x máme $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

2) Funkce $\sin x, \cos x$.

Platí: $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu.

Platí též vzorec

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

3) Funkce $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.

4) Funkce $x^n, n \in \mathbb{N}$.

$$(x^n)^{(n)} = n!, (x^n)^{(m)} = 0, \forall m \in \mathbb{N}, m > n.$$

Leibnizovo pravidlo pro n -tou derivaci součinu:

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \dots \\ &\dots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

Úloha

Určete 120. derivaci funkce $y = x^2 e^x$.

Řešení.

$$e^x(x^2 + 240x + 14280).$$



Parciální derivace funkce více proměnných

- Derivujeme vždy podle jedné proměnné.
- Ostatní považujeme za konstantu.
- Například pro funkci $z = f(x, y)$ značíme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{atd.}$$

Parciální derivace funkce více proměnných

Úloha

Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci $z = x \sin xy$.

Řešení.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cos xy + y \cos xy - xy \sin xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy, \dots$$



Funkce dané parametricky

Nezávisle proměnná x i hodnota funkce y jsou vyjádřeny soustavou

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{kde } t \in (\alpha, \beta).$$

Derivaci $\frac{dy}{dx}$ určíme pomocí diferenciálů (užitím Leibnizova symbolu):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Derivace je též funkcí parametru.

Úloha

Odvodte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.

Řešení.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$



Úloha

Funkce f je dána parametricky:
$$\begin{aligned} x &= 2 \cos t, \\ y &= 2 \sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Vypočtěte $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Funkce dané implicitně

Funkce $y = y(x)$ nechť je dána implicitní rovnicí

$$f(x, y) = 0 \quad \text{pro } x \in (a, b).$$

Na daném intervalu tedy platí identicky $f(x, y(x)) = 0$.

Proto také derivace levé strany podle x je identicky rovna nule, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Derivaci $\frac{d^2y}{dx^2}$ vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle x .

Úloha

Vypočtěte 1. a 2. derivace funkce dané implicitní rovnicí

$$x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Řešení.

$$2x + 2yy' - 0 = 0 \implies x + yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

$$1 + y'y' + yy'' = 0 \implies y'' = -\frac{1 + y'^2}{y} \implies y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}. \quad \square$$