Matematika 2 — Metody integrace pro funkce jedné proměnné

Jiří Fišer

KMA, PřF UP Olomouc

ZS09

Základní problém

Primitivní funkce F:

Pro danou f hledáme F: $\quad F' = f$.

Neurčitý integrál $F + C$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$$

K dané funkci f stanovujeme množinu všech jejích `primitivních funkcí` F, tedy „`neurčitý integrál`“ $F + C$ funkce f.

Dva problémy při zjišťování primitivní funkce k dané (elementární) funkci f:

1) zda pro danou funkci f primitivní funkce vůbec existuje,
2) pokud ano, zda ji lze vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí.

Existence:

Každá funkce f spojitá na intervalu J má zde primitivní funkci.

Vyjádření primitivní funkce elementárními funkcemi:

Jen pro vybrané typy integrovaných funkcí.

Například:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

nejsou funkce elementární, tj. nelze je vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí.

Základní vzorce pro integraci elementárních funkcí

- Ze sady základních vzorců pro derivace elementárních funkcí dostáváme ihned odpovídající vzorce pro stanovení primitivních funkcí.
- Např. $\sin x$ je primitivní k $\cos x$, neboť $(\sin x)' = \cos x$,
- neurčitým integrálem k funkci $\cos x$ je množina funkcí $\sin x + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta.

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C,$$

  kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f.
- Integrace: operace, při níž k dané funkci stanovujeme primitivní funkci nebo neurčitý integrál.
- Výraz $f(x)\,\mathrm{d}x$: integrand,
- Říkáme, že danou funkci f integrujeme.

Funkce:	Funkce primitivní:	Funkce:	Funkce primitivní:
$x^m \quad (m \in \mathbb{R},\ m \neq -1)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	a^x	$a^x / \ln a$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{coth} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Vzorce pro derivaci součtu a rozdílu

Z věty o derivaci součtu (rozdílu) plyne:

- Je-li F primitivní funkce k funkci f a
- G primitivní funkce k funkci g,

Pak

- $F + G$ $(F - G)$ je primitivní k $f + g$ $(f - g)$.

Podobně platí:

- kF (kde k je konstanta) je primitivní ke kf.

Integrace užitím substitucí

- Základem jsou dvě věty o substitucích;

$$1.VoS: \ \text{funkce}(x) = u, \quad 2.VoS: \ x = \text{funkce}(u),$$

- v obou případech nechť je funkce $f(u)$ definována na intervalu J
- funkce φ $(u = \varphi(x))$ nechť je definována na intervalu I,
- kde $\varphi(I) \subset J$, přičemž existuje φ'.

1. věta o substituci

Věta (1.věta o substituci)

Je-li F primitivní funkcí k funkci f na J, pak složená funkce $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I.

Důkaz.

$[(F \circ \varphi)(x)]' = F'_u(u) \cdot \varphi'(x) = f(u) \cdot \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x).$ $\square$

$$\underbrace{\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\,\underbrace{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = \overbrace{\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C}^{F \text{ je primitivní k } f} = F(\varphi(x)) + C = (F \circ \varphi)(x)}_{(F \circ \varphi) \text{ je primitivní k } (f \circ \varphi) \cdot \varphi'}$$

1. věta o substituci

V příkladech na použití 1. věty o substituci má tedy integrovaná funkce tvar součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce.

Úloha

Vypočtěte $I = \int \sin x \cos x \, dx.$

Řešení.

$$I = \left[\begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x \, dx = du \end{array} \right] = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Zde bylo $f(u) = u, \ \varphi(x) = \sin x.$ $\square$

1. věta o substituci

Úloha

Vypočtěte $I = \int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$I = \int \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x - \int \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \cdots .$$

První z integrálů je tabulkový, ve druhém položíme $\cos x = u$. $\square$

Vybrané typické příklady na použití 1. věty o substituci:

$$I = \int \sin^m x \cos x \, \mathrm{d}x,$$

$$I = \int \frac{\ln^m x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

$$I = \int \frac{\operatorname{arctg}^m x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x,$$

$$I = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x, \dots$$

1. věta o substituci – lineární substituce

Úloha

Vyřešte speciální případ integrace složené funkce, kde `vnitřní funkce je lineární`.

Řešení.

Je-li vnitřní funkce lineární, dostáváme z 1. věty o substituci

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

takže například

$$\int \mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3}+C, \qquad \int \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = 3\sin\frac{x}{3}+C.$$

$\square$

1. věta o substituci

Úloha

Vyřešte speciální případ integrace složené funkce ve tvaru zlomku, kde `čitatel je derivací jmenovatele`.

Řešení.

Pro $f(x) \neq 0$:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C,$$

takže například

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C, \qquad \int \frac{2x-1}{x^2-x+3}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-x+3) + C.$$

$\square$

2. věta o substituci

Věta (2. věta o substituci)

Nechť $\varphi' \neq 0$ *na* I, $\varphi(I) = J$.

Je-li funkce $\boxed{F \quad \text{primitivní k} \quad f \circ \varphi \cdot \varphi'}$ *na* I.

Pak funkce $\boxed{F \circ \varphi^{-1} \quad \text{je primitivní k} \quad f}$ *na* J

(kde φ^{-1} *je funkce inverzní k* φ*).*

Důkaz.

Nechť

$$x = \varphi(t), \quad \text{tj.} \quad t = \varphi^{-1}(x).$$

Pak

$$[(F \circ \varphi^{-1})(x)]' = [(F(\varphi^{-1}(x))]' = F_t'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' =$$
$$= f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot (1/\varphi'(t)) = f(x).$$

$\square$

2. věta o substituci

$$\left[\begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = & \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \overbrace{\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C}^{F \text{ je primitivní k } f\circ\varphi\cdot\varphi'} = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C}_{F\circ\varphi^{-1} \text{ je primitivní k } f}$$

2. věta o substituci

Úloha

Užitím 2. věty o substituci počítejte $I = \int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$I = \int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = 2\int t\sin t\,\mathrm{d}t = \cdots .$$

$\square$

- Podle 2. věty o substituci se postupuje v mnoha speciálních případech, například:
  - při integraci některých iracionálních funkcí nebo
  - u goniometrických a hyperbolických substitucí.

Metoda per partes

Věta

Nechť funkce f, g jsou definovány a mají derivaci na intervalu J. Jestliže Ψ je funkce primitivní k $f' \cdot g$ na J, pak $\Phi = f \cdot g - \Psi$ je primitivní funkcí k funkci $f \cdot g'$ na J.

Věta o per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu:

$$\Phi' = (f \cdot g - \Psi)' = f' \cdot g + f \cdot g' - \Psi' = f \cdot g'.$$

`Jiný přístup:` Pro $u = f(x)$, $v = g(x)$ je $(uv)' = u'v + uv'$, tj. $uv' = (uv)' - u'v$, takže

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x.$$

Metoda per partes – úlohy

Úloha

Vypočtěte $I = \displaystyle\int x\cos x \; \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\begin{array}{cc} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array}\right] \\
&= x\sin x - \int \sin x \; \mathrm{d}x \\
&= x\sin x + \cos x + C.
\end{aligned}
$$

□

Metoda per partes – úlohy

Úloha

Vypočtěte $I = \displaystyle\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$I = \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix}$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x = \cdots ,$$

a znovu se použije metoda per partes, viz předchozí příklad. □

Typické příklady na metodu per partes:

$$\int x^n \cos x \, dx$$

$$\int x^n \sin x \, dx$$

$$\int x^n e^x \, dx$$

$$\int x^n \ln x \, dx$$

$$\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$$

Zvláštní případy použití metody per partes

Rekurentní vzorec pro integrál $\quad I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(a^2+x^2\right)^n}, \quad n \geq 2.$

V integrálu I_m, kde $m \geq 1$, položíme $\quad u = \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n}, v' = 1$

a dostaneme

$$I_m = \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1},$$

odkud vyjádříme I_{m+1}. Položíme-li pak $m = n-1$, dostaneme

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(1) $$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x-k} = \ln|x-k| + C,}$$

Úloha

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x+3} = 2\ln|x+3| + C.$$

Úloha

$$\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{3x+2} = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(2) $$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{(x-k)^{s-1}} + C, \quad \text{kde} \quad s \neq 1.}$$

Úloha

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^3} = \frac{1}{-2(x+2)^2} + C.$$

Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(3) $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q}}$,

- kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom,
- vede po úpravě jmenovatele na funkci arctg x.

Úloha

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} =$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(4) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^s}}$,

- kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom a $s \neq 1$,
- vede na použití rekurentního vzorce.

Úloha

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+13)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[(x+3)^2+4\right]^2} = \left[\begin{array}{rcl} x+3 & = & z \\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}z \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2^2)^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{z}{z^2+2^2} + \frac{1}{2\cdot 4}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2^2}.$$

Podle (3) vede tento integrál na funkci $\operatorname{arctg} x$ a pak se vrátíme k původní proměnné x dosazením $z = x+3$.

Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy:

- Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy,
- přičemž využíváme poznatků z algebry.

Algoritmus integrace racionálních funkcí

(1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: `snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele`.

(2) `Rozložíme jmenovatel` $Q(x)$ `na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy`.

(3) Provedeme `rozklad zlomku` $R(x)/Q(x)$ `na parciální zlomky`.

(4) `Integrujeme všechny komponenty` rozkladu funkce.

Rozklad racionální funkce $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky

Polynom $Q(x)$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$Q(x) = a(x - r_1)^{k_1} \cdots (x - r_p)^{k_p} \cdot (x^2 + u_1 x + v_1)^{l_1} \cdots (x^2 + u_q x + v_q)^{l_q},$$

- a je koeficient u nejvyšší mocniny polynomu Q,
- $r_1, \dots, r_p$ jsou různá reálná čísla – kořeny polynomu Q,
  - k_i je násobnost kořenu r_i a
- $x_2 + p_j x + q_j$ jsou kvadratické polynomy bez reálných kořenů
  - l_j je násobnost jejich komplexních kořenů
  - a pro ruzná j mají tyto polynomy různé komplexní kořeny.

Rozklad racionální funkce $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky

Racionální funkce $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{A_{i,k_i}}{(x-r_i)^{k_i}}+\cdots\frac{A_{i,1}}{(x-r_i)}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{B_{j,l_j}x+C_{j,l_j}}{(x^2+u_jx+v_j)^{l_j}}+\cdots+\frac{B_{j,1}x+C_{j,1}}{(x^2+u_jx+v_j)}\right),$$

kde koeficienty typu A, B, C jsou reálná čísla.

Rozklad racionální funkce $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky

Úloha

Upravte integrál $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x$ *na základní typ (3).*

Řešení.

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1+\frac{4}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+3) + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3}.$$

□

Úloha

Upravte integrál $\int \frac{4x+3}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x$ *na základní typ (4) a dvojnásobným použitím rekurentního vzorce pak na základní typ (3).*

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+3}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{2x-1+1+\frac{3}{2}}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{(x^2-x+3)^2}+5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+3)^3} = \cdots\end{aligned}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+3)^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{11}{4})^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2\right)^3}$$