Číselné posloupnosti

Jiří Fišer

KMA, PřF UP Olomouc

ZS09

Pojem posloupnosti

- Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme ***číselná posloupnost***.

$$1 \mapsto a_1, \quad 2 \mapsto a_2, \quad 3 \mapsto a_3, \quad \dots$$

- Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$;
- a_n se nazývá n**-tý člen** posloupnosti.

Způsoby zadání posloupnosti

- několika prvními členy,
- n-tým členem,
- rekurentně.

Zadání posloupnosti několika prvními členy

Úloha

Je dána posloupnost $\frac{1}{1\cdot 4}\,,\ \frac{3}{4\cdot 7}\,,\ \frac{5}{7\cdot 10}\,,\ \frac{7}{10\cdot 13}\,,\ \cdots$ *Určete její n-tý člen.*

Řešení.

$a_n = \frac{2n-1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$ $\square$

Zadání posloupnosti n-tým členem

- $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$,
- $\{(-1)^n \cdot n\}$,
- $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$,
- $\{a \cdot q^{n-1}\}$,
- $\{a+(n-1)d\}$.

Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4.

Zadání posloupnosti rekurentně

Rekurentní definice

obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

Rekurentní definice geometrické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q \notin \{0, 1, -1\}).$$

Zadání posloupnosti rekurentně

Úloha

Posloupnost $\{a_n\}$ *je zadána rekurentně takto:* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right)$*; je to posloupnost aproximací čísla* $\sqrt{10}$*.*
Vypočtěte první čtyři aproximace.

Úloha

Fibonacciova posloupnost $\{b_n\}$ *je definována takto:* $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$*. Vypočtěte prvních* 10 *členů této posloupnosti.*

Množina (všech) členů posloupnosti

$\{a_n\}$ $\times$ množina (všech) jejích členů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \times \quad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},$$

$$\{(-1)^n\} \quad \times \quad \{-1, 1\}.$$

Vybraná posloupnost

Definice

Posloupnost $\{b_n\}$ *se nazývá* ***vybraná*** *z posloupnosti* $\{a_n\}$ *(nebo též* ***podposloupnost****)* $\Leftrightarrow$ $\exists$ *posloupnost přirozených čísel* $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ *tak, že* $\forall n \in \mathbb{N}$ *je* $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel
je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených,
ale není vybraná z posloupnosti $\{2n\text{-}1\}$ všech čísel lichých.

Základní vlastnosti číselných posloupností

Definice

*Posloupnost se nazývá (**shora, zdola**) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.*

- Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená.
- Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená.
- Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Definice

Posloupnost a se nazývá

- ***rostoucí*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n < a_{n+1}$,
- ***klesající*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n > a_{n+1}$,
- ***nerostoucí*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \geq a_{n+1}$,
- ***neklesající*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \geq a_{n+1}$.

Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: ***posloupnosti monotonní*** *a pro první dva druhy:* ***posloupnosti ryze monotonní****.*

Limita posloupnosti

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ ***má limitu*** $a \Leftrightarrow$

$$\forall U(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in U(a).$$

- *Je-li* $a \in \mathbb{R}$, *nazývá se a vlastní limita*
- *a posloupnost* $\{a_n\}$ *se nazývá* ***konvergentní****,*

- *pokud* $a = \pm\infty$, *nazývá se a nevlastní limita.*
- *Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost* $\{a_n\}$ ***divergentní****.*

Zápisy: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \to a$ *pro* $n \to +\infty$.

Limita posloupnosti

- Posloupnost tedy buď konverguje nebo
- diverguje ($+\infty$, $-\infty$ nebo *osciluje*).

- $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ je konvergentní, má limitu 1,
- stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c,
- posloupnost $\left\{\dfrac{n}{100}\right\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$,
- posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Limita posloupnosti

Definice

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí ***pro skoro všechna*** *n.*

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a $\Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Posloupnost aritmetická

Aritmetická posloupnost

- je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

- Posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní.
- n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

- Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Posloupnost aritmetická

Úloha

V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ *tisíc Kč,* $a_2 = 354$ *tisíc Kč a* $a_3 = 383$ *tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?*

Řešení.

Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.) $\square$

Posloupnost aritmetická

Součet s_n prvních n členů

Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d), \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d). \end{aligned}$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Posloupnost aritmetická

Úloha

Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?

Řešení.

Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. $\square$

Posloupnost geometrická

Geometrická posloupnost

je dána svým 1. členem a_1, konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše například matematickou indukcí).

Posloupnost geometrická

Úloha

V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o 5% *větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.*

Řešení.

Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1,05$, $n = 11$. Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1,629 = 489\,000 \text{ Kč}.$$

$\square$

Posloupnost geometrická

Limity GP

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\left\{a_1 \cdot q^{n-1}\right\}$ má limitu:

- 0 (pro $|q| < 1$) nebo
- a_1 (pro $q = 1$) nebo
- $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo
- nemá limitu (pro $q < -1$).

Posloupnost geometrická

Součet prvních n členů GP

- Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \end{aligned}$$

- Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Posloupnost geometrická

Úloha

Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrno, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrnek obilí měl dostat?

Řešení.

Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo. □

Věty o limitách

Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem).

Kdyby existovaly dvě limity a, b, pak by existovala disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a)$, $a_n \in U(b)$, což je spor. $\square$

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m. $\square$

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a

2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.

– Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.

– Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min\{\min M, a - 1\}$, $a \leq \max\{\max M, a + 1\}$.

$\square$

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta (Bolzano–Weierstrassova)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Princip důkazu B–W věty

Bolzanova metoda půlení intervalů:

- Je dána posloupnost $\{a_n\}$;
- ježto je omezená, $\exists \langle K_1, L_1 \rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1 \rangle$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, nechť v ní má index k_1.
- Interval $\langle K_1, L_1\rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2\rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2\rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2\rangle$ rozpůlíme, atd.

- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n\rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n\rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \to a$.

Věty o limitách

Věta

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Princip důkazu.

- Mějme dánu posloupnost $\{a_n\}$;
- z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$.
- Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n,
- takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$.

$\square$

Aritmetické operace s posloupnostmi

Definice

Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

- ***násobení reálným číslem c**: $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;*
- ***aritmetické operace** (součet, rozdíl, součin, podíl):* $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$, $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n / b_n\}$, *(pro $b_n \neq 0$);*
- ***opačná posloupnost** k $\{a_n\}$ je $\{-a_n\}$;*
- ***reciproká posloupnost** k $\{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).*

Věty o limitách

Věta (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. *Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v* $\mathbb{R}^*$ *smysl:*

1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
3) *pro* $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ *je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz.

Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \begin{array}{l} : n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2), \\ : n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2). \end{array}$$

Nechť $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak
$$\begin{array}{l} a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2, \\ b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2. \end{array}$$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *a pro nekonečně mnoho n platí* $a_n \leq b_n$. *Pak* $a \leq b$.

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. $\square$

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$*,* $\lim b_n = a$ *a nechť pro skoro všechna n je* $a_n \leq c_n \leq b_n$*. Pak* $\lim c_n = a$*.*

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

Limes inferior a limes superior

Uvažujme omezenou posloupnost $\{a_n\}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$:

$$\alpha_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}, \qquad \beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Úloha

Určete tři prní členy posloupností $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ pro posloupnost $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right\}$.

Limes inferior a limes superior

Úloha

Určete tři prní členy posloupností $\{\alpha_n\}$ *a* $\{\beta_n\}$ *pro posloupnost* $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right\}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \inf\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},-\frac{1}{8},\frac{1}{9}\cdots\right\} = -\frac{1}{2},\\
\alpha_2 &= \inf\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},-\frac{1}{8},\frac{1}{9}\cdots\right\} = -\frac{1}{4},\\
\alpha_3 &= \inf\left\{-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},-\frac{1}{8},\frac{1}{9}\cdots\right\} = -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

□

Limes inferior a limes superior

Úloha

Určete tři prní členy posloupností $\{\alpha_n\}$ *a* $\{\beta_n\}$ *pro posloupnost* $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right\}$.

Řešení.

$$\beta_1 = \sup\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots\right\} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_2 = \sup\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots\right\} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = \sup\left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots\right\} = \frac{1}{5}.$$

□

Limes inferior a limes superior

Z definic $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ plyne:

- $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$,
- $\{\alpha_n\}$ je neklesající,
- $\{\beta_n\}$ je nerostoucí a
- z omezenosti $\{a_n\}$ plyne i omezenost $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$,

a tedy jsou obě posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ konvergentní (mají vlastní limitu).

Limes inferior a limes superior

Definice

Nechť posloupnost $\{a_n\}$ *je omezená, pak definujeme její dolní limitu (limes inferior)*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

a její horní limitu (limes superior)

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Úloha

Určete dolní a horní limitu posloupnosti $(-1)^n \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Řešení.

Zde si opět vypíšeme několik prvních členů studované posloupnosti:

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, -\frac{9}{6}, \frac{11}{7}, -\frac{13}{8}, \frac{15}{9}, -\frac{17}{10}, \frac{19}{11}, \dots, -\frac{1997}{1000}, \frac{1999}{1001}, \dots .$$

Zřejmě

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 2, \quad \text{ale samotná} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{neexistuje.}$$

□

Úloha

Určete dolní a horní limitu posloupnosti $(-1)^n \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Řešení.

Odvodíme omezenost:

$$\left|(-1)^n \frac{2n-1}{n+1}\right| = \frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = 2,$$

a tak

$$-2 \leq (-1)^n \frac{2n-1}{n+1} \leq 2.$$

Posloupnost je tedy omezená — existence dolní a horní limity je tedy zajištěna. $\square$

Úloha

Určete dolní a horní limitu posloupnosti $(-1)^n \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} a_n &:= \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} -2 = -2, \\
\limsup_{n\to+\infty} a_n &:= \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2 = 2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Nulové posloupnosti

- Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$.
- Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak,
- konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta

$$a_n \to a \Leftrightarrow (a_n - a) \to 0.$$

Věty o limitách nulových posloupností

Věta

Jestliže $a_n \to a$*, pak* $|a_n| \to |a|$.

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

Věty o limitách nulových posloupností

Věta

Jestliže $|a_n| \to +\infty$, *je* $\dfrac{1}{a_n}$ *posloupnost nulová.*

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta

Je-li $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &a_n > 0,\ a_n \to 0, \quad \textit{pak} \quad 1/a_n \to +\infty,\\ &a_n < 0,\ a_n \to 0, \quad \textit{pak} \quad 1/a_n \to -\infty,\\ &a_n \neq 0,\ a_n \to 0, \quad \textit{pak} \quad 1/|a_n| \to \infty. \end{aligned}$$

Věty o limitách nulových posloupností

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

- Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+n}{4n^2+5}$.
- Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6\cdot 2^{2n}+5\cdot 2^n-4}{2^{2n+1}-2^n+15}$.
- Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+150}{n^2-0,25}$.
- Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-8n}{9n^2+10}$.

Posloupnosti v praxi

- Uspořádané n-tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi.
- Známe několik prvních členů $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nějaké posloupnosti.
- Pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1}.
- Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad.
- Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích.
- Může jít o nalezení vzorce pro n-tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Některé významné limity

Věta

$\forall a > 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
  Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1+u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
  $0 < u_n < \dfrac{a-1}{n}$, podle V3L je $u_n \to 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\dfrac{1}{a}$,
  pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.

$\square$

Věta (Bernoulliova nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}$, $h > -1$, $h \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *platí* $V(n) : (1+h)^n > 1 + nh$.

Některé významné limity

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující dvě limity:

Věta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Věta

$$\forall a > 1, \forall k > 0 : \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$$

(Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ *rychleji* než mocnina n^k.)

Úloha

Dokažte, že $\forall a > 1: \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0.$

Řešení.

- Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže
- pro skoro všechna n platí $\quad 1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon.$
- zlogaritmováním nerovnosti při základu a dostaneme:

$$\log_a 1 < \log_a \sqrt[n]{n} < \log_a a^\varepsilon, \qquad \log_a 1 < \log_a n^{\frac{1}{n}} < \log_a a^\varepsilon,$$

$$0 < \frac{1}{n}\log_a n < \varepsilon \log_a a, \qquad 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

$\square$

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!}$, *kde* $q > 0$.

Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ *rychleji než exponenciála* q^n.

Řešení.

- Pro $q \leq 1$ je tato limita rovna 0.
- Pro $q > 1$ jde o typ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ (nelze použít větu o limitě podílu).
- Označme $a_n = \frac{q^n}{n!}$; pak $a_{n+1} = \dfrac{q}{n+1} a_n$,
- pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a.
- Přejdeme-li v rovnosti k limitě, máme $a = 0$.

$\square$

Úloha

Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

Řešení.

Lze uvažovat například posloupnost dolních desetinných aproximací. $\square$

Další typy posloupností v MA

- Posloupnosti množin (např. intervalů),
- posloupnosti funkcí, ad.
- Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu.
- Například posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí.
- Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

Eulerovo číslo e

Funkce $y = \mathrm{e}^x$ a funkce $y = \ln x$ ($= \log_{\mathrm{e}} x$) patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo e.

$$\mathrm{e} := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní:

1. dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí,
2. dokážeme, že je shora omezená.

Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí

Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} = \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1-\frac{j}{n}\right)$.

$$a_n = \overbrace{1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}}^{n+1 \text{ výrazů s činiteli tvaru } \left(1-\frac{j}{n}\right)}$$

$$a_{n+1} = \underbrace{1+\binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}_{n+2 \text{ výrazů s činiteli tvaru } \left(1-\frac{j}{n+1}\right)}$$

Jelikož $\left(1-\dfrac{j}{n+1}\right) > \left(1-\dfrac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je

$$a_{n+1} > a_n$$

a posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je shora omezená

Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1-\dfrac{j}{n+1}\right)$ číslem 1

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}<\frac{1}{k!},$$

takže platí

$$a_n<b_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji e; z předchozího plyne, že $2<\mathrm{e}<3$.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \to +\infty$ máme $\mathrm{e} \geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq \mathrm{e}$; podle věty o třech limitách pak je $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}$. Přitom b_n je podle své definice tzv. n-tým částečným součtem řady, takže

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2{,}718\,281\,828\,459\,0\ldots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.