

Matematika 2 — Průběh funkce

Jiří Fišer

KMA, PřF UP Olomouc

ZS09

Základní věty diferenciálního počtu

Úvod

Věta (Fermatova)

- f je definována na M
- a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty.

♥ Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.

Princip důkazu pro největší hodnotu

- Sledujeme znaménko podílu $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- v levém okolí bodu x_0 : $d(x) \geq 0$
- v pravém okolí bodu x_0 : $d(x) \leq 0$

♥ Z toho pak plyne $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = 0$.

Úvod

- Fermatovu větu lze vztáhnout na lokální extrém a jeho okolí,
- má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto:
- **má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule.**

Věta

Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě x_0 je, že v něm derivace $f'(x_0)$

- *bud' neexistuje*
- *nebo je rovna nule.*

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

Věty o střední hodnotě

Tři věty,

- Rolleova,
- **Lagrangeova,**
- Cauchyova,

jsou obvykle nazývány

- **věty o střední hodnotě diferenciálního počtu.**

Všechny tři věty o střední hodnotě jsou navzájem ekvivalentní.

Jádrem je věta Lagrangeova.

Věty o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova)

Nechť funkce f

- 1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- 2) má derivaci na intervalu (a, b) ,

Pak existuje bod

$$\xi \in (a, b)$$

tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Věty o střední hodnotě

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

- $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$:

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$;

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

- $x = x_0 + \Delta x$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

- Jiný zápis:

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x,$$

ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též **věta o přírůstku funkce**.

Některé důsledky vět o střední hodnotě

Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě;

- na jednom je založen pojem neurčitého integrálu,
- druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

Některé důsledky vět o střední hodnotě

Věta (o konstantní funkci)

Funkce f je na intervalu (a, b) konstantní $\iff$

- má na (a, b) derivaci
- a $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$.

Důsledek

- Mají-li dvě funkce f, g na (a, b) stejné derivace, tj.

$$f'(x) = g'(x),$$

pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj.

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{tak, že na } (a, b) \text{ je } f(x) = g(x) + C.$$

Některé důsledky vět o střední hodnotě

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobné tvrzení lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Necht'

1) *funkce f , g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$,*

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$

3) *existuje vlastní nebo nevlastní*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Pak existuje i a rovná se

$$K.$$

L'Hospitalovo pravidlo

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x - 2)}{x^2 - 4}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$. $[1]$

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^3 + 2x^2 + 1}$. $[2]$

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\cotg x}$. [0]

L'Hospitalovo pravidlo

- L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu:
z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí.
- Například $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{|x|} = 1$.
- Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo

- Při výpočtu limit typu $[0 \cdot \infty]$ součin funkcí $f \cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl

$$\frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{nebo naopak} \quad \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla

- tedy například funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x.$ $[0]$

L'Hospitalovo pravidlo

Počítáme-li limitu typu $[\infty - \infty]$ rozdílu funkcí $f - g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$.

Řešení.

$-\frac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí.



L'Hospitalovo pravidlo

U limit typu

$$[0^0], [\infty^0] \text{ a } [1^\infty]$$

pro funkce

$$f^g$$

postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $e^{g \cdot \ln f(x)}$,
limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a
v exponentu dostaneme limitu typu $[0 \cdot \infty]$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$. [1]

Užití diferenciálního počtu

Monotónnost funkce

- Při vyšetřování průběhu funkce se také zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu nebo bodě monotónní.
- Zjišťování monotónnosti funkce pomocí derivace funkce.

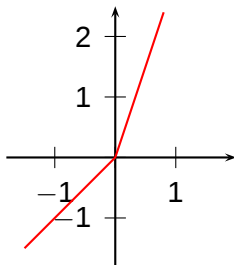
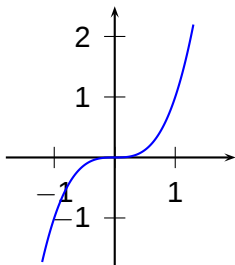
Věta

Jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a $f'(x_0) > 0$, pak f je *rostoucí* v bodě x_0 .

Princip důkazu.

- $f'(x_0) > 0 \implies$ v jistém okolí $U(x_0)$ je také $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.





Obrázek: Grafy funkcí rostoucích v bodě 0: $y = x^3$ a $y = 2x + |x|$.

- Tato věta vyjadřuje jen postačující podmínku, **neplatí obráceně**.
- Funkce rostoucí v bodě může mít i **nulovou derivaci** nebo **derivaci nemít** (viz obr.).
- Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

Stacionární bod funkce

x_0 je stacionárním bodem funkce $f \iff f'(x_0) = 0$.

- Ve stacionárním bodě může být funkce
 - ▶ rostoucí,
 - ▶ klesající
 - ▶ nebo v něm nemusí být monotónní.

Věta (o monotónnosti na intervalu)

Má-li funkce f derivaci na (a, b) , pak platí:

1) Funkce f je na (a, b) :

$$\text{neklesající} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \geq 0$$

$$\text{nerostoucí} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \leq 0.$$

2) Funkce f je na (a, b) :

$$\text{rostoucí} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \geq 0$$

$$\text{klesající} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \leq 0,$$

$$\text{přičemž neexistuje } (\alpha, \beta) \subset (a, b); \forall x \in (\alpha, \beta) \quad f'(x) = 0.$$

Úloha

Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce $f : y = x^2 e^{-x}$.

Řešení.

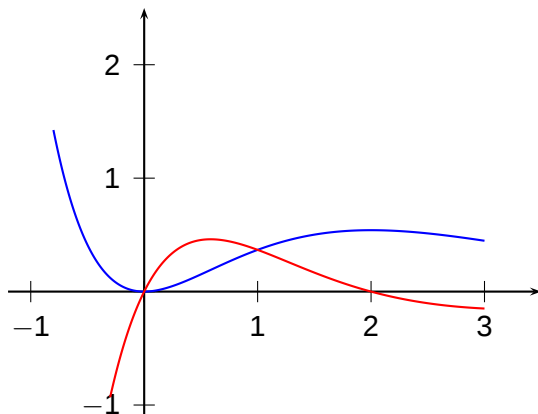
$$D(f) = \mathbb{R}.$$

$$y' = (2x - x^2) e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}.$$

intervaly:

- (1) $(-\infty, 0)$: $y' \leq 0$ (nulová v jediném bodě) $\implies f$ je klesající,
- (2) $\langle 0, 2 \rangle$: $y' \geq 0$ (nulová ve dvou bodech) $\implies f$ je rostoucí,
- (3) $\langle 2, +\infty \rangle$: $y' \leq 0$ (nulová v jediném bodě) $\implies f$ je klesající.





Obrázek: Grafy funkcí $y = x^2 e^{-x}$ a $y' = x(2 - x) e^{-x}$ z úlohy.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0

- lokální minimum:

$$\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) : f(x) \geq f(x_0),$$

- lokální maximum:

$$\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) : f(x) \leq f(x_0).$$

- ostré lokální minimum:

$$\exists P(x_0), \forall x \in P(x_0) : f(x) > f(x_0),$$

- ostré lokální maximum:

$$\exists P(x_0), \forall x \in P(x_0) : f(x) < f(x_0).$$

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že f má v bodě x_0 **LOKÁLNÍ EXTRÉM**.

Nutná podmínka existence lokálního extrému:

- Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.
- Funkce tedy může mít extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce $y = |x|$).

Postup při určování lokálních extrémů

- Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (**body stacionární**) nebo v nichž derivace neexistuje; *označíme* x_0 .
- Další možný postup:
 - (1) Užití monotónnosti v okolí bodu x_0
 - (2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0
 - (3) Užití 2. derivace v bodě x_0

(1) Užítí monotónnosti v okolí bodu x_0

Nechť f je **spojitá** v x_0 a existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$.

- Je-li f **rostoucí v $P(x_0-)$**
- a **klesající v $P(x_0+)$** ,

má funkce f v bodě x_0 **(ostré) lokální maximum**.

Podobně lze formulovat další případy:

- ostré lokální minimum,
- neostré extrémy
- a případ, kdy extrém neexistuje.

(2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0

- f je **spojitá** v x_0
- a existuje okolí $P(x_0) \subset D(f)$, v němž má funkce f derivaci.

Je-li

- $f'(x) > 0$ v $P(x_0-)$
- a $f'(x) < 0$ v $P(x_0+)$,

má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum.

Podobně lze formulovat další případy.

(3) Užití 2. derivace v bodě x_0

- f má derivaci v nějakém okolí $U(x_0) \subset D(f)$
- a existuje $f''(x_0)$.

Je-li

- $f''(x_0) < 0$,

má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum,

je-li

- $f''(x_0) > 0$,

má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální minimum.

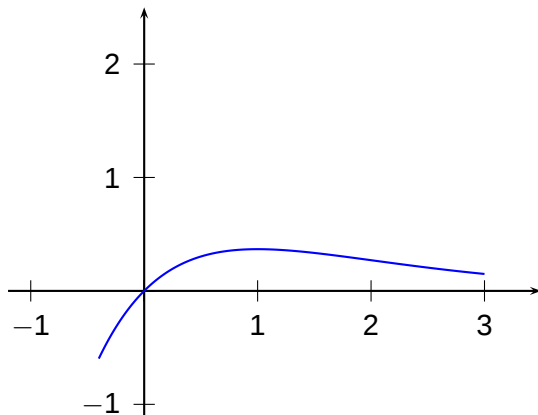
Úloha

Zjistěte extrém funkce $f : y = x e^{-x}$.

Řešení.

- $y' = (1 - x) e^{-x}$
- $y' = 0$ pro $x_0 = 1$.
- $y'' = (x - 2) e^{-x}$.
- $y''(1) = -e^{-1} < 0 \implies f$ má v bodě 1 lokální maximum.





Obrázek: Graf funkce $y = x e^{-x}$ s lokálním maximem v bodě 1.

Pozor: $f''(x_0) = 0$ neznamená neexistenci extrému.

Jestliže funkce f má derivace v $U(x_0)$ a platí ($n > 1$)

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

pak

(1) pro n sudé existuje v bodě x_0 extrém:

- ▶ lokální maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- ▶ lokální minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) pro n liché lokální extrém v bodě x_0 neexistuje.

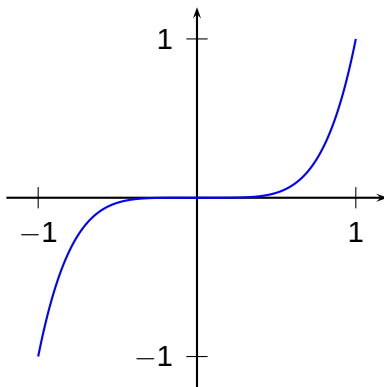
Úloha

Vyšetřete extrém funkce $f : y = x^5$.

Řešení.

- Máme $y' = 5x^4$, stacionární bod 0.
- $y'' = 20x^3$, $y''(0) = 0$,
- $y''' = 60x^2$, $y'''(0) = 0$,
- $y^{(4)} = 120x$, $y^{(4)}(0) = 0$,
- $y^{(5)} = 120 > 0$.
- První nenulová derivace je **lichého řádu**, tedy **extrém neexistuje**.





Obrázek: Graf funkce $y = x^5$ bez lokálního extrému v bodě 0.

Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci f definovanou a spojitou na $\langle a, b \rangle$.

- Podle 2.Weierstrassovy věty nabývá funkce f
 - v některém bodě c_1 své **největší hodnoty**
 - a v některém bodě c_2 své **nejmenší hodnoty**.
- Jiné názvy: *absolutní extrémy, globální extrémy*.
- Každý z bodů c_1, c_2 přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Pokud je c_i vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokální extrém,
 - tedy stacionární bod
 - nebo bod, v němž neexistuje derivace.

Postup při určování největší a nejmenší hodnoty funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$

- (1) Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.
- (2) Vypočteme funkční hodnoty v bodech a, b .
- (3) Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je největší hodnotou funkce na $\langle a, b \rangle$,
- (4) minimum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je nejmenší hodnotou funkce na $\langle a, b \rangle$.

Tedy: není třeba určovat lokální extrémy.

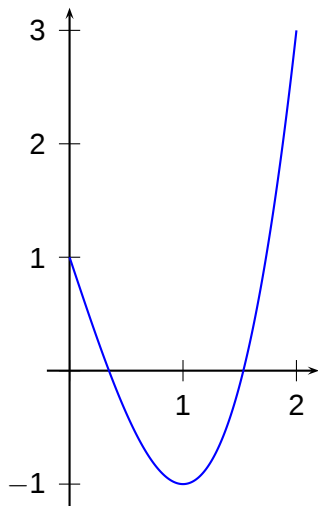
Úloha

Máme určit největší a nejmenší hodnotu funkce $f : y = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Řešení.

- $y' = 3x^2 - 3$; f má na $\langle 0, 2 \rangle$ jediný stacionární bod 1.
 - $f(1) = -1$
 - $f(0) = 1$,
 - $f(2) = 3$.
- Funkce f tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty -1 v bodě 1.





Obrázek: Globální extrémy funkce $y = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

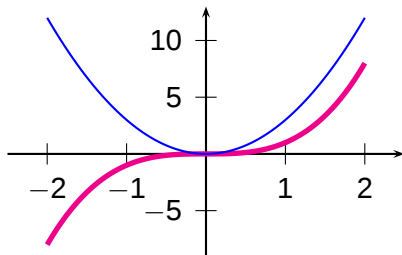
Konvexnost a konkávnost

Věta (1.věta o konvexnosti a konkávnosti)

- Necht' funkce f **má** na intervalu (a, b) **derivaci** f' .

Pak funkce f je na (a, b) **konvexní** (**konkávní**) $\iff$ je

- f' na (a, b) **rostoucí** (**klesající**).



Obrázek: Graf funkce $y = x^3$ a její první derivace $y = 3x^2$.

Konvexnost a konkávnost

Na funkci f' lze nyní použít větu o monotónnosti na intervalu:

Věta (2. věta o konvexnosti a konkávnosti)

Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b) ,

pak tato funkce je na (a, b) **konvexní** $\left(\text{konkávní} \right) \iff$

- $\forall x \in (a, b)$ je $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0 \right)$,
- přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ bylo $f''(x) = 0$.

Inflexe a inflexní body

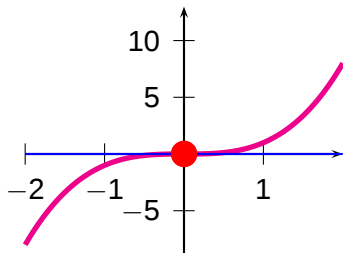
Definice

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexi** $\iff$

- f má derivaci $f'(x_0)$ a je
 - v levém okolí $U(x_0-)$ **konvexní** (**konkávní**)
 - a v pravém okolí $U(x_0+)$ **konkávní** (**konvexní**).

Bod $[x_0, f(x_0)]$ roviny se nazývá **inflexní bod** funkce f ,
resp. grafu funkce f .

Inflexe a inflexní body



Obrázek: Graf funkce $y = x^3$, inflexního bodu $(0;0)$ a inflexní tečny $y \equiv 0$.

- V inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak.
- *Inflexní tečna* v bodě „dotyku“ graf přechází z jedné poloviny do druhé.
- Např. osa x je inflexní tečnou ke grafu funkce $y = x^3$.

Věta (vztah inflexe a derivace)

Má-li funkce f v nějakém okolí $U(x_0)$ derivaci f' , pak má v bodě x_0 inflexi $\Leftrightarrow$ má f' v bodě x_0 lokální extrém.

Věta (nutná podmínka existence inflexe)

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.

Důkaz plyne z nutné podmínky existence extrému funkce f' .

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

Věta ((vztah inflexe a druhé derivace)

Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f''

- a má-li tato derivace v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 inflexi.*
- Má-li f'' stejné znaménko v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$, pak funkce f v bodě x_0 inflexi nemá.*

Věta (vztah inflexe a 3. derivace)

- Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' ,
- platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$,
- pak funkce f má v bodě x_0 inflexi.

- Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

- Pro k liché existuje v bodě x_0 inflexe,
- pro k sudé nikoli.

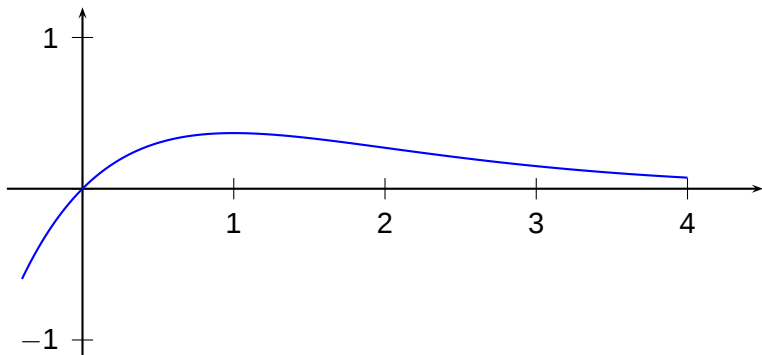
Úloha

Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce $y = x e^{-x}$.

Řešení.

- Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme:
- $y' = (1 - x) e^{-x}$,
- $y'' = (x - 2) e^{-x}$, kde $e^{-x} > 0$.
- Pro $x < 2$ je $y'' < 0$, funkce je konkávní,
- pro $x > 2$ je $y'' > 0$, funkce je konvexní.
- Pro $x = 2$ má funkce inflexi, inflexní bod je $[2; 2 e^{-2}]$.



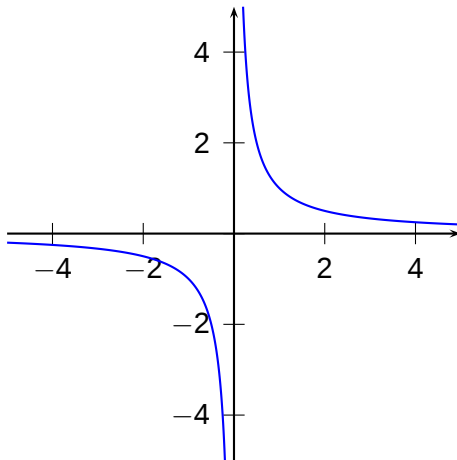


Obrázek: Graf funkce $y = x e^{-x}$ s inflexním bodem $[2; 2 e^{-2}]$.

Asymptoty

- Asymptoty jsou přímky,
 - představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu.
 - Souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce $y = 1/x$.
- Definujeme asymptoty dvou druhů (avšak z geometrického hlediska jde o tentýž jev).

Asymptoty



Obrázek: Asymptoty $y = 0$ a $x = 0$ grafu funkce $y = \frac{1}{x}$.

Asymptoty

Definice

Přímka $x = c$ se nazývá **vertikální asymptota** grafu funkce $f \iff$ funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

- I nekonečně mnoho: tangens.
- Kromě toho nejvýše dvě asymptoty s rovnicemi tvaru $y = kx + q$.

Definice

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota (se směrnicí)** grafu funkce $f \iff$
- pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$ je

$$\lim[f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Asymptoty se směrnicí

Věta (o výpočtu asymptot)

Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce f $\iff$
existují limity (pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Praktický postup v běžných případech

- 1) Vyšetříme okolí těch hromadných bodů $D(f)$, které leží v $\mathbb{R} - D(f)$
 - (body nespojitosti - zejména izolované body množiny $\mathbb{R} - D(f)$ nebo krajní body intervalů, jež jsou součástí $D(f)$).
 - Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.
- 2) Je-li $+\infty$ nebo $-\infty$ hromadným bodem $D(f)$, hledáme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
 - Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice k asymptot, *pokud asymptoty existují*.
 - Dále ještě hledáme $\lim [f(x) - kx]$ s oním k , jež bylo vypočteno v předchozí limitě.
 - Existuje-li tato limita, je to q a asymptota existuje.

Při výpočtu $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$. Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, neznamená to neexistenci asymptot).

Úloha

Určete asymptoty pro funkci $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.

Řešení.

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = \frac{1}{2}.$

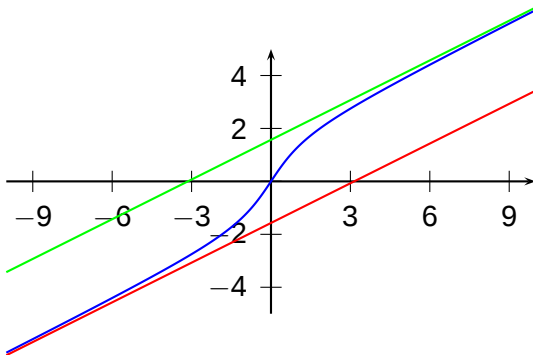
- Dále $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) = \pm \frac{\pi}{2}$

- Existují tedy 2 asymptoty:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \rightarrow -\infty \text{ a}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \rightarrow +\infty.$$





Obrázek: Asymptoty $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$ a $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ grafu funkce $y = \frac{x}{2} + \arctg x$.

Úloha

Určete asymptoty pro funkci $y = x + \sqrt{x}$.

Řešení.

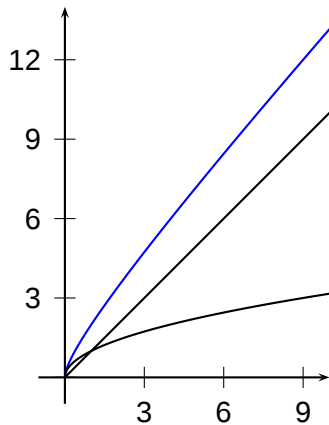
- Zde je nevlastním hromadným bodem $D(f)$ jen $+\infty$.
- Počítáme

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty,$$

- asymptota neexistuje.





Obrázek: Graf funkce $y = x + \sqrt{x}$ je bez asymptot.

Průběh funkce

O vyšetřování průběhu funkce lze pojednat dvěma způsoby:

- uvést věcně, ze kterých činností se vyšetřování průběhu funkce skládá,
- popsat praktický postup při vyšetřování průběhu funkce.

Věcný výčet činností při vyšetřování PF

- 1) Definiční obor, body nespojitosti.
- 2) Funkční obor, omezenost; nulové body funkce; intervaly, kde je funkce kladná, kde je záporná.
- 3) Funkční vlastnosti funkce: parita, periodičnost.
- 4) Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce, v krajních bodech definičního oboru, resp. v $-\infty$, $+\infty$.
- 5) Intervaly monotonnosti (kde funkce roste, kde klesá) nebo konstantnosti.
- 6) Lokální extrémy funkce.
- 7) Intervaly konvexnosti a konkávnosti.
- 8) Inflexe, inflexní body grafu funkce.
- 9) Asymptoty grafu funkce.
- 10) Sestrojení grafu funkce.

Praktický postup při vyšetřování PF

V běžném případě sleduje i myšlenku správného a přehledného záznamu výsledků a mezivýsledků do tabulky:

- A. Zjistíme údaje potřebné pro sestavení tabulky, sestavíme tabulku a zaznamenejeme do ní dosud známé údaje o funkci,
- B. postupně zjišťujeme další vlastnosti funkce a zaznamenáváme je do tabulky,
- C. doplníme údaje potřebné pro sestrojení grafu a sestrojíme graf funkce.

Doporučené pořadí prací u bodu A.

- A1. Provedeme 1 (určíme $D(f)$ a body nespojitosti).
- A2. Provedeme 3 (stanovení parity a periodičnosti), tj. zjistíme, zda bychom mohli zmenšit rozsah vyšetřování funkce tím, že se omezíme např. jen na interval $\langle 0, +\infty \rangle$ nebo jen na jednu periodu u funkce periodické.
- A3. Vypočteme 1. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme stacionární body. K nim přidáme ty body z $D(f)$, v nichž 1. derivace neexistuje. Má-li funkce lokální extrém, pak nastane v některém z těchto bodů.
- A4. Vypočteme 2. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme body, v nichž může mít funkce inflexi. K nim přidáme ty body z $D(f')$, v nichž 2. derivace neexistuje.
- A5. Sestavíme tabulku, kde v horizontálním záhlaví zaznamenáme rozčlenění číselné osy s ohledem na A1, A2, A3, A4; ve vertikálním záhlaví jsou řádky pro x , y , y' , y'' , a pro záznam vlastností funkce f . Do tabulky přeneseme údaje již zjištěné.

Doporučené pořadí prací u bodu B.

- B1. Užitím znaménka 1. derivace určíme 5 (intervaly monotonnosti).
- B2. Na základě B1 zjistíme 6 (lokální extrémy), včetně funkčních hodnot v těchto bodech.
- B3. Užitím znaménka 2. derivace určíme 7 (konvexnost a konkávnost).
- B4. Na základě B3 zjistíme 8 (inflexi), včetně funkčních hodnot v těchto bodech a hodnot 1. derivací.
- B5. Určíme 9 (asymptoty).
- B6. Určíme 4 (limity), pokud je to po B5 ještě třeba.
- B7. Určíme 2 (funkční obor, nulové body, znaménka funkce).

Doporučené pořadí prací u bodu C.

- C1. Podle potřeby doplníme např. průsečík grafu funkce s osou y , hodnoty funkce v dalších bodech $D(f)$, případně i hodnoty derivací (připojíme k tabulce jako dodatek).
- C2. Provedeme bod 10 (sestrojíme graf funkce).

Úloha

Sestavte tabulku pro vyšetření průběhu funkce $y = x + \frac{1}{x}$.

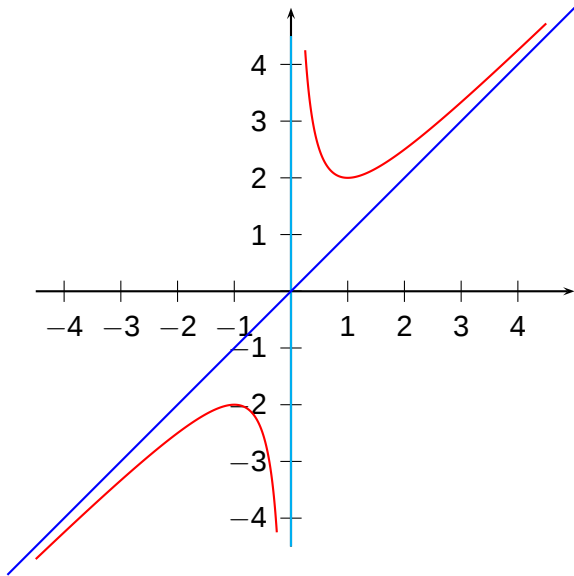
Řešení.

$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, lichá, graf souměrný podle počátku.
 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$ (stacionární body); $y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0$.
Sestavíme tabulku (např. jen) pro interval $\langle 0, +\infty \rangle$.

x	0	$\rightarrow 0^+$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$\rightarrow +\infty$
y	n.d.	$\rightarrow +\infty$	—	2	—	$\rightarrow +\infty$
y'	n.d.	$\rightarrow -\infty$	< 0	0	> 0	$\rightarrow +\infty$
y''	n.d.	—	> 0	> 0	> 0	—
fce	n.d.	$\rightarrow +\infty$	klesá	lok.min.	roste	$\rightarrow +\infty$
		asymptota $x = 0$	konvexní			asymptota $y = x$

Inflexní body neexistují.





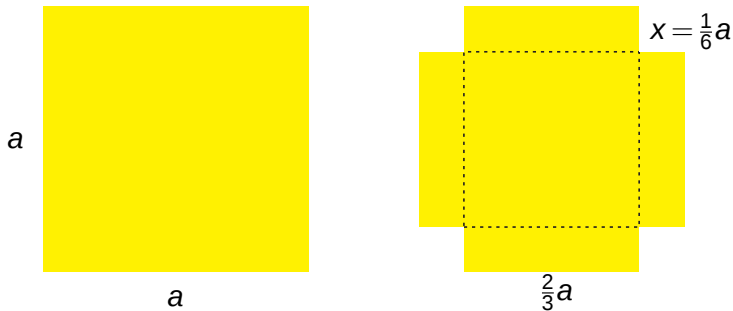
Obrázek: Graf funkce $y = x + \frac{1}{x}$, vertikální asymptota $x = 0$ a asymptota se směnicí $y = x$.

Užití extrémů funkcí

Na výpočet extrémů vede řada praktických úloh.

Úloha

- Ze čtvercového listu papíru o straně  má být po vystřížení čtverečků (o straně ) v rozích složena krabice o maximálním objemu.
- Vypočtete stranu čtverečků, jež mají být v rozích vystříženy a rozměry výsledné krabice.



Obrázek: Budoucí krabice o maximálním objemu

Řešení.

Výsledná krabice má rozměry

$$(a - 2x) \times (a - 2x) \times x.$$

Její objem je tedy:

$$V = (a - 2x)^2 x, \quad x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$$

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \implies x_1 = \frac{a}{6}, \quad x_2 = \frac{a}{2}$$

(x_2 nevyhovuje praktické úloze);

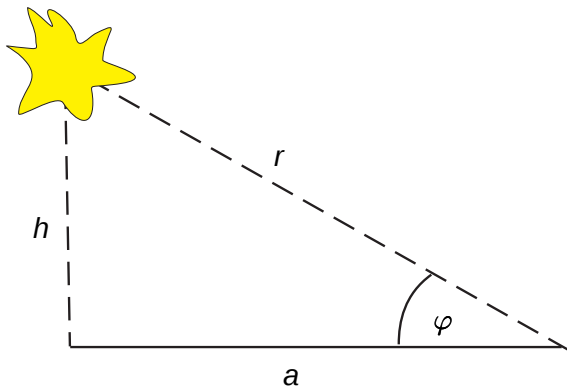
$$\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{6}a$$

- rozměry krabice jsou
- výška je rovna čtvrtině šířky čtvercového dna.



Úloha

- Pracoviště je v konstantní vzdálenosti a od průmětu světla na vodorovnou rovinu.
- Při jaké výšce h světla je osvětlení pracoviště maximální?



Obrázek: Intenzita osvětlení

Řešení.

Intenzita osvětlení závisí na vstupních podmínkách takto:

$$I = c \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

kde

$$\sin \varphi = \frac{h}{r} \quad \text{a} \quad r = \sqrt{h^2 + a^2},$$

takže $I = I(h)$; po dosazení

$$I = c \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$I' = c \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (= 0) \implies h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,7a.$$



Užití extrémů funkcí

Úloha

- Výkon Peltonova kola je $P = k \cdot u \cdot (v - u)$, kde
 - u je obvodová rychlost Peltonova kola a
 - v je rychlost vodního paprsku.
- Při jaké rychlosti u je výkon Peltonovy turbíny maximální?

Řešení.

$$P = P(u), \quad P' = kv - 2ku (= 0) \implies u = \frac{v}{2}.$$



Užití extrémů funkcí



Obrázek: Příliš mnoho plechu.

Úloha

Určete rozměry konzerv tvaru rotačního válce o daném objemu  tak, aby se při jejich výrobě spotřebovalo **co nejmenší množství plechu**.

- Hledá se minimum funkce $S = 2\pi xv + 2\pi x^2$, kde
 - x je poloměr dna konzervy a
 - v výška konzervy,
 - za podmínky, že $V = \pi x^2 v$ je zadané (tedy konstantní).
- Po dosazení za v z této podmínky ($v = \frac{V}{\pi x^2}$) máme

$$S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2, \quad \text{odkud} \quad S' = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x.$$

Z rovnice $S' = 0$ máme $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

$$v_0 = \frac{V}{\pi x_0^2} = \dots = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x_0$$

Odsud je: výška konzervy je rovna průměru dna.