

Matematika 2 — Spojitost funkce

Jiří Fišer

KMA, PŘF UP Olomouc

ZS09

Spojitosť funkce

- Spojitosť patří k nejvýznamnějším vlastnostem funkcí.
- Setkáváme se s ní — jako s požadovanou vlastností funkcí — ve všech částech matematické analýzy.

Pojem spojitosti funkce

- Intuitivní představa spojitosti funkce f v bodě x_0
 - ▶ je spojena s grafem funkce: graf v tomto bodě „není přetržený“,
- funkce je v daném bodě definována a v malém okolí bodu x_0 jsou malé i změny funkce.
- Spojitosť v bodě je lokální vlastnost funkce.

Spojitosť funkce v bodě

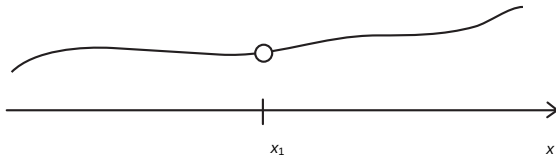
Říkáme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \Leftrightarrow$

- 1 je v bodě x_0 definována (tj. $x_0 \in D(f)$),
- 2 existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a platí
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

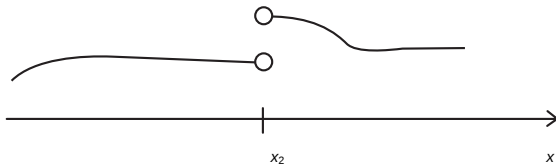
Úloha

Definujte spojitost v bodě x_0 zleva a spojitost zprava.

Různé případy (ne)spojitosti

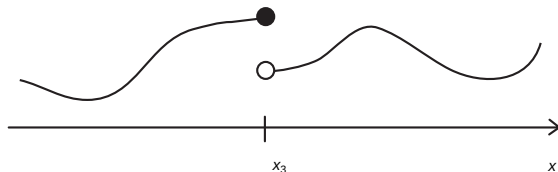


Obrázek: V bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu (DODEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).

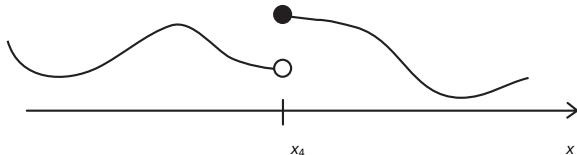


Obrázek: V bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).

Různé případy (ne)spojitosti

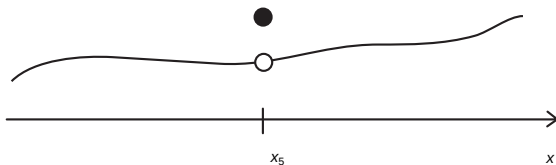


Obrázek: V bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).

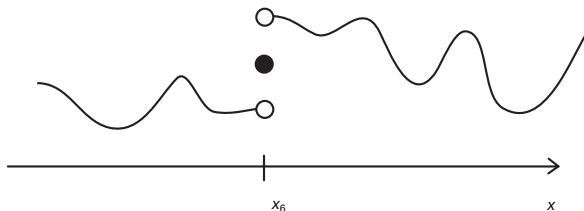


Obrázek: V bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).

Různé případy (ne)spojitosti

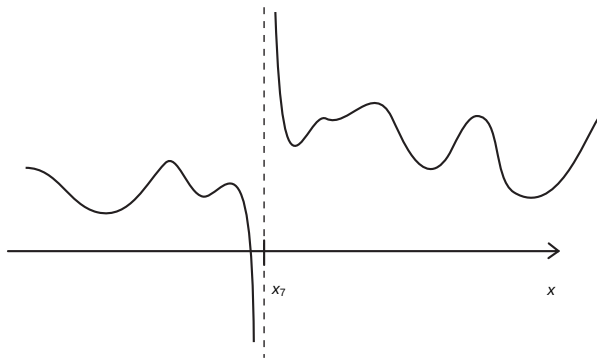


Obrázek: V bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota (PŘEDFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



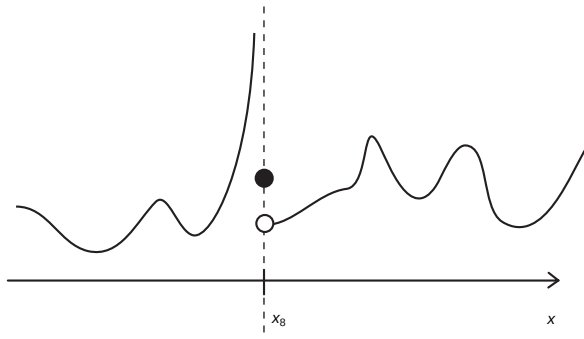
Obrázek: V bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).

Různé případy (ne)spojitosti



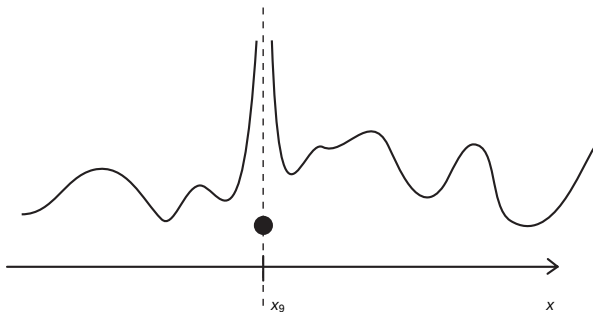
Obrázek: V bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Různé případy (ne)spojitosti



Obrázek: V bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Různé případy (ne)spojitosti



Obrázek: V bodě $x_g \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Nespojitost

Definice

*Hromadný bod x_0 definičního oboru $D(f)$, v němž funkce f není spojitá, se nazývá **bod nespojitosti** funkce f .*

Druhy nespojitosti

Nespojitost v bodě x_0 se nazývá

- **odstranitelná** $\iff$
 - ▶ f má v bodě x_0 vlastní limitu,
 - ▶ ale funkční hodnota $f(x_0)$
 - ★ buď není definována
 - ★ nebo není rovna limitě;
- **neodstranitelná** ve všech ostatních případech nespojitosti.

Neodstranitelnou nespojitost nazveme

- **1. druhu** $\iff$
 - ▶ v bodě x_0 existují obě jednostranné vlastní limity,
 - ▶ ale jsou různé;
 - ▶ rozdíl limit $f(x_0+) - f(x_0-)$ (někdy jen absolutní hodnotu tohoto rozdílu) nazýváme **skok**;
- **2. druhu** ve všech ostatních případech.

Druhy nespojitosti

Poznámka

Odstranitelnou nespojitost lze odstranit tak, že funkci f v bodě x_0 dodefinujeme nebo předefinujeme tak, aby se funkční hodnota rovnala limitě funkce v bodě x_0 .

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce je nespojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jaká je to nespojitost?

Základní věty o spojitosti v bodě x_0

Jsou-li funkce

- f, g spojité v bodě x_0 a $c \in \mathbb{R}$,

pak jsou v tomto bodě spojité též funkce

- $f + g$,
- $f - g$,
- $c \cdot f$,
- $f \cdot g$,
- $|f|$
- a pro $g(x_0) \neq 0$ i $\frac{f}{g}$.

(Pro součty, rozdíly a součiny platí tato vlastnost při libovolném konečném počtu členů resp. činitelů.)

Základní věty o spojitosti v bodě x_0

Věta

Je-li funkce φ spojitá v bodě x_0 , funkce f spojitá v bodě $a = \varphi(x_0)$, pak složená funkce $f \circ \varphi$ je spojitá v bodě x_0 .

Věta

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 , pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že na $D(f) \cap U(x_0)$ je f omezená (je to tzv. lokální omezenost spojitě funkce).

Základní věty o spojitosti v bodě x_0

Věta

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$, funkce f je spojitá v x_0 a $f(x_0) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in U(x_0) \cap D(f) \implies \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0).$$

Věta

Nechť x_0 je oboustranný hromadný bod $D(f)$.

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$ je v něm spojitá zleva i zprava.

Základní věty o spojitosti v bodě x_0

Věta (Pravidlo $\varepsilon-\delta$)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in U(x_0, \delta) \cap D(f) \implies f(x) \in (f(x_0), \varepsilon).$$

Poznámka

- *Tato vlastnost se též nazývá Cauchyova definice spojitosti; tedy takto lze definovat spojitost funkce v hromadném bodě $D(f)$ bez použití pojmu limita.*
- *V uvedeném pravidle $\varepsilon-\delta$ je ovšem pojem limity fakticky obsažen, viz pravidlo $\varepsilon-\delta$ pro limitu funkce.*
- *Podobně následující větu lze chápat jako Heineho definici spojitosti.*

Základní věty o spojitosti v bodě x_0

Věta

Necht' x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$$\forall x_n, x_n \in D(f), x_n \rightarrow x_0 \text{ platí } f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Věta

ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ VE VŠECH BODECH, V NICHŽ JSOU DEFINOVÁNY.

Funkce spojité na množině

Spojitosť funkce na množině je globální vlastností funkce.

Definice

Říkáme, že funkce f **je spojitá na množině** $M \subset D(f) \iff$ je spojitá v každém bodě množiny M .

Zápis: $f \in C(M)$.

Říkáme, že funkce f **je spojitá** $\iff f$ je spojitá na $D(f)$.

Poznámka

Je třeba rozlišovat spojitost na $D(f)$ a spojitost na uzávěru $\overline{D(f)}$.
Například funkce $f : y = 1/x$ je podle výše uvedené definice spojitá, neboť je spojitá na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ale není spojitá na množině $\mathbb{R} = \overline{D(f)}$.

Funkce spojité na množině

Někdy lze požadavek na spojitost funkce poněkud „oslabit“ a uvažovat funkce jen „po částech spojitě“ (viz například Newtonův vzorec v kapitole Riemannův určitý integrál).

Definice

Funkce f se nazývá **po částech spojitá** na $M \iff$

- je spojitá ve všech bodech množiny M
- s výjimkou konečného počtu bodů M ,
 - ▶ v nichž je definovaná
 - ▶ a má zde nespojitost 1. druhu
 - ▶ nebo nespojitost odstranitelnou.

Funkce spojité na množině

K tomu, abychom mohli spojitosti prakticky využívat, je třeba se přesvědčit, které z běžně používaných funkcí jsou spojité. Především i zde přirozeně platí:

Věta

VŠECHNY ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ.

Funkce spojitě na množině

- Z vlastností spojitosti plyne, že jsou spojitě i všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí dostaneme konečným počtem aritmetických operací a skládání funkcí.
- Nejdůležitějším zvláštním případem spojitosti na M je spojitost na intervalu.

Přitom spojitost na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená, že

- ▶ f je spojitá na (a, b) ,
- ▶ v levém krajním bodě a je spojitá zprava
- ▶ a v pravém krajním bodě b je spojitá zleva.

Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

- 1. Weierstrassova věta
- 2. Weierstrassova věta
- Bolzano-Cauchyova věta

1. Weierstrassova věta

Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na tomto intervalu omezená.

Důkaz (sporem).

- Kdyby funkce f nebyla omezená na $\langle a, b \rangle$ (například shora), pak by ke každému $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(x_n) > n$.
- Posloupnost $\{x_n\} \subset \langle a, b \rangle$ je omezená, takže podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x'_n\}$ s limitou x_0 , pro niž též $f(x'_n) > n$.
- Proto $f(x_0)$ je (podle Heineho definice spojitosti a podle věty o limitě nerovnosti)
 - ▶ jednak $+\infty$
 - ▶ a jednak reálné číslo vzhledem ke spojitosti f v každém bodě $\langle a, b \rangle$, tedy i v x_0 ,a to je spor.



2. Weierstrassova věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší i nejmenší hodnoty.

Tedy existují body $c_1, c_2 \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$f(c_1) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Důkaz 2. Weierstrassovy věty (části o maximu)

- Podle 1. Weierstrassovy věty je f shora omezená, takže existuje konečné

$$\sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) = M.$$

- Stačí tedy dokázat, že existuje $c_1 \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(c_1) = M$.
- Kdyby takový bod c_1 neexistoval, byla by funkce

$$g(x) = M - f(x)$$

na $\langle a, b \rangle$ spojitá a kladná.

- Proto i funkce $\frac{1}{g(x)}$ by byla na $\langle a, b \rangle$ spojitá,
- tedy podle 1. Weierstrassovy věty omezená kladnou konstantou

$$L : \frac{1}{g(x)} < L \implies g(x) > \frac{1}{L} \implies f(x) < M - \frac{1}{L};$$

- dostali jsme spor se 2. vlastností suprema,
- takže $g(x)$ nemůže být stále kladná,
- tedy uvažovaný bod c_1 existuje.

1. a 2. Weierstrassova věta

Úloha

Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 1. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení.

Úloha

Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 2. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení. (Například uvažte funkci $y = x$ na intervalu $(-1, 1)$.)

Bolzano-Cauchyova

Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí-li

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

pak existuje bod $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz (Bolzanovou metodou půlení intervalů)

- Interval $\langle a, b \rangle$ rozpůlíme bodem c_1 .
 - ▶ Pokud $f(c_1) = 0$, je $\xi = c_1$.
 - ▶ Jinak označíme $\langle a_1, b_1 \rangle$ tu polovinu, kde $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.
- Interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ rozpůlíme bodem $c_2 \dots$
- Buď $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\xi = c_n$
- nebo dostáváme posloupnost vložených intervalů, které mají podle věty o vložených intervalech jediný společný bod ξ ; o něm se dokáže $f(\xi) = 0$.
 - ▶ Nemůže být $f(\xi) > 0$, neboť by existovalo okolí $U(\xi)$ tak, že $\forall x \in U(\xi)$ by bylo $f(x) > 0$
 - ▶ a to je spor (pro dosti velké n by bylo $\langle a_n, b_n \rangle \subset U(\xi)$).
 - ▶ Stejně tak nemůže platit, že $f(\xi) < 0$, proto $f(\xi) = 0$.

Užití B.-C. věty

Této věty se užívá například při řešení rovnic k důkazu existence řešení.

Úloha

Dokažte, že rovnice $x + \sin(x - 1) = 0$ má alespoň jeden kořen.

Řešení.

Uvažujeme například $a = -2$, $b = 2$ (najděte menší interval!) ☐