Matematika 2 — Riemannův určitý integrál

Jiří Fišer

KMA, PřF UP Olomouc

ZS09

Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem:

- `užitím (Cauchyových) integrálních součtů` nebo
- `pomocí dolních a horních integrálů`.

Základní podmínky

- Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$.
- *Dělení intervalu* (označíme D) — každá konečná posloupnost bodů $x_0, x_1, \dots, x_n$ (zvaných *dělicí*), kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- *Element dělení* $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, jeho délka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- *Norma dělení* $\nu(D) = \max \Delta x_i$, stručné označení ν.

Dolní a horní integrál

Dolní a horní integrální součet — DEFINICE

- Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné dělení D.
- Pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ definujeme:

$$m_i = \inf f(x), \quad M_i = \sup f(x)$$

  - dolní integrální součet příslušný f a D:

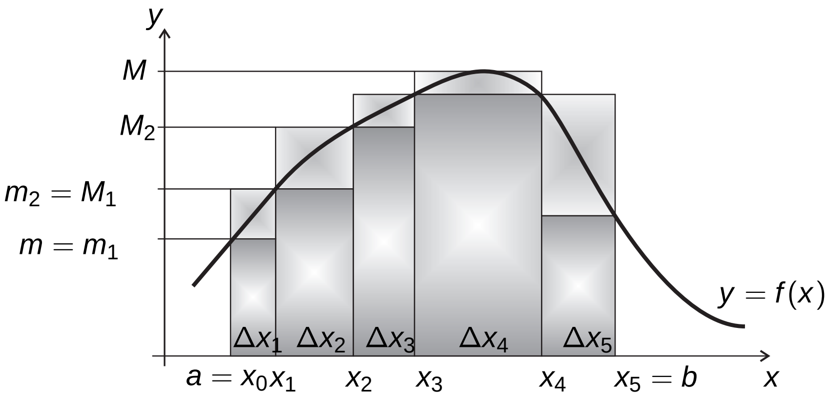
$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i,$$

  - horní integrální součet příslušný f a D:

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i.$$

Dolní a horní integrál

Dolní a horní integrální součet — Obrázek



Obrázek:

(1) $\forall D_1, D_2; \quad s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$

(2) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže pro $x \in \langle a, b \rangle$ označíme $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, platí

$$m(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a).$$

Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

Definice

Číslo

$$\mathrm{I}_* f = \sup_D s(f, D) \quad (\mathrm{I}^* f = \inf_D S(f, D))$$

nazýváme `dolní (horní) Riemannův integrál.`

Zřejmě platí $s(f, D) \leq \mathrm{I}_* f \leq \mathrm{I}^* f \leq S(f, D)$.

Dolní a horní integrál

Úloha

Úloha

Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení.

Máme

$$s(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad \mathrm{I}_* \chi = 0,$$

$$S(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1, \quad \mathrm{I}^* \chi = 1.$$

$\square$

Dolní a horní integrál

Definice

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že funkce f je na $\langle a, b\rangle$ `Riemannovsky integrovatelná`*, $f \in R(\langle a, b\rangle)$, právě když*

$$\mathrm{I}_* f = \mathrm{I}^* f.$$

Společnou hodnotu $\mathrm{I}f$ dolního a horního integrálu nazveme `Riemannův integrál funkce` *f na $\langle a, b\rangle$ a píšeme*

$$\mathrm{I}f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— $\langle a, b\rangle$ je *obor integrace*,

— čísla a, b *dolní* resp. *horní mez integrace*,

— x *integrační proměnná*.

- Geometrický význam dolního součtu – obsah mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce.
- Geometrický význam horního součtu – obsah mnohoúhelníku, do nějž je základní obrazec vepsán.
- Geometrickým významem Riemannova integrálu – obsah (míra) základního obrazce.

Dá se dokázat, že do množiny $R(\langle a, b\rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

- třída všech funkcí *spojitých* na $\langle a, b\rangle$,
- třída všech funkcí *spojitých po částech* na $\langle a, b\rangle$,
- třída všech funkcí *monotónních a omezených* na $\langle a, b\rangle$.

V množině $R(\langle a, b\rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g \in R(\langle a, b\rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

Věta (Newtonův vzorec)

Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Úloha

Vypočtěte $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x.$

Řešení.

$$I = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2. \qquad \square$$

Úloha

Vypočtěte $I = \displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Řešení.

Nejprve určíme primitivní funkci: $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \text{(substitucí)} = -\frac{1}{\ln x} + C.$

Pak $I = \displaystyle\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{e}^{e^2} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}.$ $\square$

Věta (lineární vlastnosti)

(1) *Je-li* $f \in R(\langle a, b\rangle)$, $k \in \mathbb{R}$, *pak* $kf \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) *Je-li* $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$, *pak* $(f+g) \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Princip důkazu.

Použijí se vlastnosti integrálních součtů. □

Věta (vlastnosti vyjádřené nerovnostmi)

Nechť $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$.

(3) *Je-li* $f(x) \geq 0$ *na* $\langle a, b\rangle$, *pak* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(4) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *na* $\langle a, b\rangle$, *pak* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) $|f(x)| \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Princip důkazu.

(3) plyne z definice, (4) ze (3) a (5) ze (4), neboť
$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. $\square$

Základní vlastnosti určitého integrálu

Věta (aditivita integrálu)

Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a, b\rangle)$, právě když $f \in R(\langle a, c\rangle) \wedge f \in R(\langle c, b\rangle)$. Přitom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Princip důkazu.

Plyne z vlastností integrálních součtů, když bod c vezmeme za dělicí bod. $\square$

Tuto vlastnost lze rozšířit na konečný počet bodů $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha

Vypočtěte $I = \int_0^3 |x-2| \, dx.$

Řešení.

$$I = \int_0^2 (2-x)\, dx + \int_2^3 = \cdots$$

$\square$

Základní vlastnosti určitého integrálu

Vlastnosti závislé na intervalu integrování — Rozšíření definice Riemannova integrálu pro případ, že $a \geq b$:

Pro $a = b$ definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Pro $a > b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pak pro *libovolné* uspořádání bodů a, b, c platí

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pokud je funkce f integrovatelná v nejširším intervalu určeném body a, b, c.

Základní vlastnosti určitého integrálu

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec.

`Výpočet užitím substituce nebo per partes` Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat tak, že nejprve vypočteme neurčitý integrál a pak se vrátíme k určitému, nebo můžeme provést *transformaci mezí*.

Věta

Je-li $f \in R(\langle a, b\rangle)$, φ *má spojitou derivaci na* $\langle \alpha, \beta\rangle$, *přičemž* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Úloha

Vypočtěte $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Řešení.

$$I = \left[\begin{array}{cc} x = \sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \sin 2t\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Podobně pro per partes platí

Věta

Jsou-li u', v' spojité na $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{x=a}^{b} - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Základní vlastnosti určitého integrálu

Výpočet určitých integrálů — Úloha na per partes

Úloha

Vypočtěte $I = \int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$I = \left[\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = [-\cos x]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = \cdots = \pi.$$

□