Cvičení č. 3 z KMA-MAF1

3. října 2011

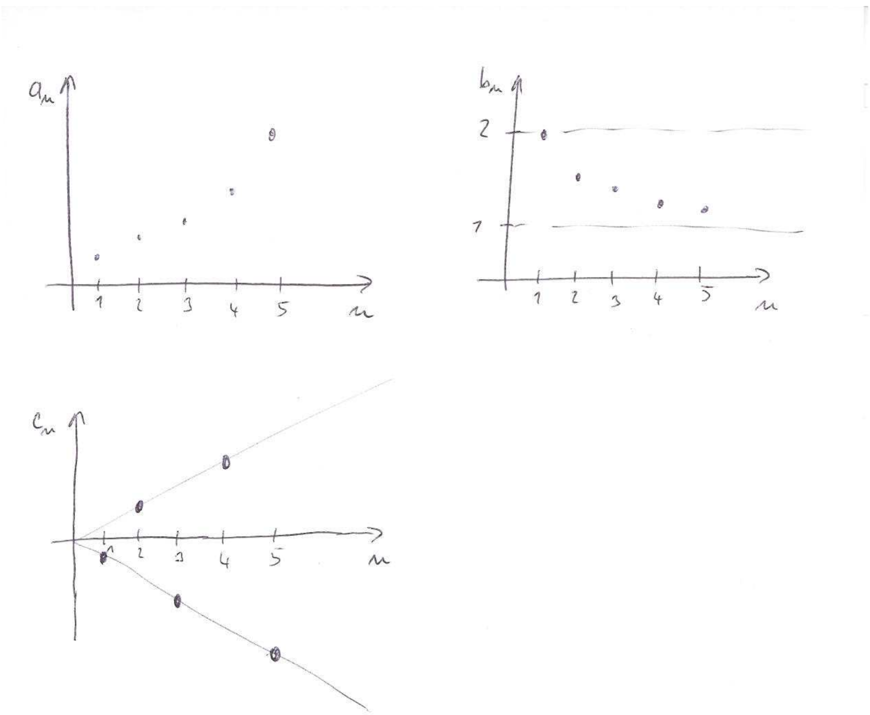
1 Číselné posloupnosti

Úloha 1.1. *Znázorněte graficky prvních pět členů posloupností:*

$$a_n = n^2, \qquad b_n = 1 + \frac{1}{n}, \qquad c_n = (-1)^n n.$$

Řešení.

$$\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}, \quad \{b_n\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}, \quad \{c_n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}.$$



□

1.1 Omezenost posloupností

Úloha 1.2. *Určete, zda jsou následující posloupnosti ohraničené:*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = 3\sin(n^2 + 1).$$

Řešení. Snažíme se omezit n-tý člen a tím i celou posloupnost:

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1,$$

a tedy posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, neboť

$$-1 \leq a_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podobně:

$$|b_n| = \left|3\sin(n^2+1)\right| = 3\left|\sin(n^2+1)\right| \leq 3 \cdot 1 = 3,$$

neboť

$$-1 \leq \sin x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{a tedy i} \quad -1 \leq \sin(n^2+1) \leq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Takto je posloupnost $\{b_n\}$ omezená, neboť

$$-3 \leq b_n \leq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

1.2 Posloupnosti aritmetické a geometrické

Úloha 1.3. *Zjistěte, zda jsou následující posloupnosti aritmetické:*

$$a_n = 2 - \frac{n}{3}, \qquad b_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Řešení. U aritmetické posloupnosti musí být rozdíl $(n+1)$. a n-tého členu konstantní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro $a_n = 2 - \frac{n}{3}$ máme

$$\{a_n\} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\right\},$$

takže z prvních několika členů bychom mohli usoudit, že jde o AP, ale pro důkaz potřebujeme konstantní diferenci dokázat obecně pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(d =)a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{n+1}{3}\right) - \left(2 - \frac{n}{3}\right) = -\frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\left\{2 - \frac{n}{3}\right\}$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{5}{3} + (n-1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} - (n-1)\frac{1}{3}.$$

Pro $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ máme

$$\{b_n\} = \left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots\right\}.$$

Zde již můžeme vidět problém, neboť

$$b_2 - b_1 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10-9}{6} = \frac{1}{6}, \quad b_3 - b_2 = \frac{7}{4} - \frac{5}{3} = \frac{21-20}{12} = \frac{1}{12},$$

a tak diference není konstantní a nejde tedy o AP. □

2 Limity posloupností

Úloha 2.1. *Dokažte z definice, že* $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$*, kde* $c \in \mathbb{R}$.

Řešení. Definice limity posloupnosti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in U(a,\varepsilon).$$

Upravíme pro naši situaci ($a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n\to+\infty} c = c \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; c \in U(c,\varepsilon).$$

Vzhledem k tomu, že podmínka $c \in U(c,\varepsilon)$, neboli $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$, je splněna automaticky, n_0 existuje vždy a dokonce $n_0 = 1$. c je tedy limitou konstantní posloupnosti $\{c\}$. □

Úloha 2.2. *Dokažte z definice, že* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Řešení. Definice limity posloupnosti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in U(a,\varepsilon),$$

neboli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Upravíme pro naši situaci ($a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Řešíme tedy nerovnost

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Z podstaty nerovnosti $n > \frac{1}{\varepsilon}$ lze vyvodit, že pro dané $\varepsilon > 0$ je splněna od určitého n_0, například:

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \text{ dostaneme } n > \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10, \text{ a tedy } n_0 = 11,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} \text{ dostaneme } n > \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000, \text{ a tedy } n_0 = 1001.$$

Tím je dáno, že 0 je skutečně limitou posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. □

Úloha 2.3. *Diskutujte limitu* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha$*, kde* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Jde o úlohu s reálným parametrem α. Výsledná limita (její existence, popřípadě hodnota) závisí na tomto parametru. Musíme zjistit, jak se chová pro každou hodnotu $\alpha \in \mathbb{R}$. V předchozím příkladu již máme popsáno chování pro $\alpha = -1$ ($\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$) a z podstaty i pro $\alpha = 1$ ($\lim_{n\to+\infty} n = \infty$). Dále ...

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & , \ \alpha > 0; \\ 1 & , \ \alpha = 0; \\ 0 & , \ \alpha < 0. \end{cases}$$

□

Úloha 2.4. *Určete, jakým způsobem se chová pro libovolné $k, l \in \mathbb{N}$ následující limita:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0}.$$

Řešení. Nejprve provedeme výpočet pro tři typické příklady ($k < l$, $k = l$, $k > l$):

$k < l$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - n + 5}{5n^4 - 2n + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1}\right]_{\text{nedef.}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2})}{n^4(5 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{n^2(5 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{+\infty(5 - 0 + 0)}\right] = 0. \end{aligned}$$

$k = l$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - n + 5}{5n^2 - 2n + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1}\right]_{\text{nedef.}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2})}{n^2(5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{5 - 0 + 0}\right] = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$k > l$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4 - n + 5}{5n^2 - 2n + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1}\right]_{\text{nedef.}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4(2 - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4})}{n^2(5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(2 - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4})}{5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \left[\frac{+\infty(2 - 0 + 0)}{5 - 0 + 0}\right] \\ &= \left[\frac{2}{5}(+\infty)\right] = \operatorname{sgn} \frac{2}{5}(+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Obecně tedy můžeme zapsat, že:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k < l, \\ \dfrac{a_k}{b_l}, & \text{pro } k = l, \\ \left(\operatorname{sgn} \dfrac{a_k}{b_l}\right)(+\infty), & \text{pro } k > l. \end{cases}$$

□

Úloha 2.5. *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cdot 9^{n+3} - 3\cdot 3^{14} + 3^{n+5}}{3^{2n-5} + 6\cdot 3^{n+1} + 3^n}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 9^{n+3} - 3\cdot 3^{14} + 3^{n+5}}{3^{2n-5} + 6\cdot 3^{n+1} + 3^n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2(n+3)}\left(2 - 3^{(1+14)-(2n+6)} + 3^{(n+5)-(2n+6)}\right)}{3^{2n-5}\left(1 + 2\cdot 3^{1+(n+1)-(2n-5)} + 3^{n-(2n-5)}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^8\left(2 - 3^{-2n+9} + 3^{-n-1}\right)}{1\cdot\left(1 + 2\cdot 3^{-n+7} + 3^{-n+5}\right)} \\
&= \left[\frac{3^8(2-0+0}{1+0+0}\right] = 2\cdot 3^8 = 13\,122.
\end{aligned}$$

□

Úloha 2.6. *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|n-(-1)^n 10|\,(n+1)}{n^2+5}$.

Řešení. Pro dostatečně velká n je výraz v absolutní hodnotě kladný, a tak při výpočtu limity pro $n\to+\infty$ nebude mít aplikace absolutní hodnoty žádný vliv. Nemusíme s ní tedy počítat:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|n-(-1)^n 10|\,(n+1)}{n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-(-1)^n 10)(n+1)}{n^2+5}.$$

Člen $(-1)^n$ způsobuje jistou oscilaci. My si s ní poradíme využitím věty o třech limitách následujícím způsobem:

$$\begin{array}{ccccc}
b_n & \leq & a_n & \leq & c_n, \\
\frac{(n-10)(n+1)}{n^2+5} & \leq & \frac{(n-(-1)^n 10)(n+1)}{n^2+5} & \leq & \frac{(n+10)(n+1)}{n^2+5},
\end{array}$$

kde

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-9n-10}{n^2+5} = 1,$$

a zároveň

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+11n+10}{n^2+5} = 1,$$

a tak i

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-(-1)^n 10)(n+1)}{n^2+5} = \frac{|n-(-1)^n 10|\,(n+1)}{n^2+5} = 1.$$

□

Úloha 2.7. *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots(2n-1)}{n^2+1}$.

Řešení. V čitateli máme součet prvních n lichých čísel. Lichá čísla tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 1 a prvním členem také 1. Jedná se tedy o součet prvních n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1+a_n) = \frac{n}{2}\Big(1+(2n-1)\Big) = n^2.$$

Výraz v limitě tedy můžeme přepsat a dopočítat:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3+5+\cdots(2n-1)}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

□

2.1 Limity s n-tými odmocninami

Používáme „tabulkové" limity (pro $a > 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Úloha 2.8. *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[n]{\frac{1}{10}} - \sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n/2]{n} + \sqrt[2n]{n}}$.

Řešení. Nejprve vypočteme dílčí limity:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{10}} = 1,$
   neboť $(a) = \frac{1}{10} > 0$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = [1 \cdot 1] = 1.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n/2]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n/2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \left[1^2\right] =$
   $1.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \left[\sqrt{1}\right] = 1.$

Dohromady tedy dostáváme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt[n]{\frac{1}{10}} - \sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n/2]{n} + \sqrt[2n]{n}} = \left[\frac{2 \cdot 1 - 1}{1+1}\right] = \frac{1}{2}.$$

□

2.2 Limity a číslo e

Zde vycházíme z definitorické limity: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Úloha 2.9. *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+25}$.

Řešení.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+25} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{25} = \left[\mathrm{e} \cdot 1^{25}\right] = \mathrm{e}\,.$$

□

Úloha 2.10. *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$.

Řešení.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}\cdot 5} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = \left[\mathrm{e}^5\right] = \mathrm{e}^5\,.$$

□

Obecně platí (pro $a \in \mathbb{R}$): $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a.}$

2.3 Limita „složené“ posloupnosti

Úloha 2.11. *Vyšetřete limitu posloupnosti* $\left\{\dfrac{2a^n+1}{a^n-1}\right\}$*; diskutujte různé případy pro číslo* $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nejprve předvedeme dílčí limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, \quad \text{pro } a>1, \\ 1, \quad \text{pro } a=1, \\ 0, \quad \text{pro } |a|<1, \\ \text{neexistuje pro } a=-1, (\text{osciluje mezi } -1 \text{ a } 1) \\ \text{neexistuje pro } a<-1, (\text{osciluje a } |a^n| \to +\infty. \end{cases}$$

S využitím těchto skutečností můžeme přejít k původní limitě:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2a^n+1}{a^n-1} = \begin{cases} 2, \quad \text{pro } a>1, \\ \text{nedefinováno pro } a=1, \\ -1, \quad \text{pro } |a|<1, \\ \text{nedefinováno pro } a=-1, \\ 2, \quad \text{pro } a<-1. \end{cases} = \begin{cases} 2, \quad \text{pro } |a|>1, \\ \text{nedefinováno pro } a=1, \\ -1, \quad \text{pro } |a|<1, \\ \text{nedefinováno pro } a=-1, \end{cases}$$

neboť například pro $|a|>1$ dostáváme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2a^n+1}{a^n-1} = \lim_{|a|^n\to+\infty} \frac{2a^n+1}{a^n-1} = \lim_{|a|^n\to+\infty} \frac{a^n\left(2+\frac{1}{a^n}\right)}{a^n\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}$$

$$= \lim_{|a|^n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{a^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{a^n}\right)} = \left[\frac{2+0}{1-0}\right] = 2.$$

□

Úloha 2.12. *Diskutujte limity:*

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n}$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Řešení.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ pro $a>1$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $a>1$ (případně i $a<-1$, tedy dohromady $|a|>1$);

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

$\square$

Úloha 2.13. *S využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ vypočtěte*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n - \sqrt{n^2-n}}$.

Řešení.

ad a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = [\infty - \infty, \text{tedy nedef.}]$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \left[\frac{2}{\infty+\infty} = 0\right] = 0.$$

ad b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n - \sqrt{n^2-n}} = [\dfrac{1}{\infty - \infty}, \text{tedy nedef.}]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}} \cdot \frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n^2-(n^2-n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\infty}} = 1 + 1 = 2\right] = 2.$$

$\square$