# Cvičení KMA-MAF1
# Neurčitý a určitý integrál

Jiří Fišer

9. prosince 2011

# Obsah

# 1 Úlohy na přímou integraci

**Úloha 1.1.** $I = \displaystyle\int \frac{5x^2 - 3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

*Řešení.* $I = \displaystyle\int \frac{5x^2 - 3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x =$

$$5\int x^{2-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C. \qquad \square$$

**Úloha 1.2.** $I = \displaystyle\int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

*Řešení.* $I = \displaystyle\int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int 3^x\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \cdots.$ $\square$

# 2 Úlohy na jednoduché substituce

## 2.1 Lineární substituce $u = ax + b$

**Úloha 2.1.** $I = \displaystyle\int \Big(\cos(2x-3) + \sin(x+5)\Big)\,\mathrm{d}x.$

*Řešení.* $I = \displaystyle\int \Big(\cos(2x-3)+\sin(x+5)\Big)\,\mathrm{d}x = \int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x + \int \sin(x+5)\,\mathrm{d}x =$

$$\left[\begin{array}{c|c} u = 2x-3 & v = x+5 \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{2} = \mathrm{d}x & \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \cos(u)\mathrm{d}u + \int \sin(v)\mathrm{d}v =$$

$$\frac{1}{2}\sin(u) - \cos(v) + C = \frac{1}{2}\sin(2x-3) - \cos(x+5) + C. \qquad \square$$

### 2.1.1 Další jednoduché substituce

**Úloha 2.2.** $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}.$

*Řešení.* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \left[\begin{array}{c} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{u}}{u-1} = \int \frac{1}{u(u-1)}\mathrm{d}u =$

$$-\int \frac{-1}{u(u-1)}\mathrm{d}u = -\int \frac{-u+u-1}{u(u-1)}\mathrm{d}u = -\int \frac{(-u)+(u-1)}{u(u-1)}\mathrm{d}u =$$

$$-\int\Big(-\frac{u}{u(u-1)}+\frac{u-1}{u(u-1)}\Big)\mathrm{d}u=-\int\Big(-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u}\Big)\mathrm{d}u=$$

$$\int\frac{1}{u-1}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u-1|-\ln|u|+C=$$

$$\ln|\mathrm{e}^x-1|-\ln|\mathrm{e}^x|+C=\ln|\mathrm{e}^x-1|-\ln\mathrm{e}^x+C=\ln|\mathrm{e}^x-1|-x+C.$$ □

**Úloha 2.3.** $I=\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

*Řešení.* $$I=\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\begin{bmatrix} u=x^2-a^2\\ \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ \frac{\mathrm{d}u}{2}=x\,\mathrm{d}x\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{u}+C=\sqrt{x^2-a^2}+C.$$ □

# 3 Integrace metodou per partes

$$(u\cdot v)'=u'v+uv'\quad\Longrightarrow\quad uv'=(u\cdot v)'-u'v\quad\Longrightarrow$$

$$\int uv'\,\mathrm{d}x=\int(u\cdot v)'\,\mathrm{d}x-\int u'v\,\mathrm{d}x=uv-\int u'v\,\mathrm{d}x.$$

**Úloha 3.1.** $I=\displaystyle\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* $$I=\int\sin^2x\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=\sin x & v'=\sin x\\ u'=\cos x & v=-\cos x\end{bmatrix}=-\sin x\cos x+\int\cos^2x\,\mathrm{d}x=$$
$$-\sin x\cos x+\int(1-\sin^2x)\,\mathrm{d}x=-\sin x\cos x+\int\mathrm{d}x-\int\sin^2x\,\mathrm{d}x=-\sin x\cos x+$$
$$x-\int\sin^2x\,\mathrm{d}x.$$

Máme tedy rovnost:

$$\int\sin^2x\,\mathrm{d}x=-\sin x\cos x+x-\int\sin^2x\,\mathrm{d}x.$$

Odtud:

$$\int\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{x-\sin x\cos x}{2}+C.$$

□

**Úloha 3.2.** $I = \int x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x.$

*Řešení.* $\int x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^2 & v' = \cos 2x \\ u' = 2x & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$

$x^2 \dfrac{1}{2} \sin 2x - \int 2x \dfrac{1}{2} \sin 2x \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} \sin 2x - \int x \sin 2x \, \mathrm{d}x =$

$\begin{bmatrix} u = x & v' = \sin 2x \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} = \dfrac{x^2}{2} \sin 2x + x\dfrac{1}{2} \cos 2x - \dfrac{1}{2} \int \cos 2x \, \mathrm{d}x =$

$\dfrac{x^2}{2} \sin 2x + \dfrac{x}{2} \cos 2x - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} \sin 2x + C = \dfrac{x^2}{2} \sin 2x + \dfrac{x}{2} \cos 2x - \dfrac{1}{4} \sin 2x + C.$ □

**Úloha 3.3.** $I = \int \mathrm{tg}^2\, x \, \mathrm{d}x.$

*Řešení.* $I = \int \mathrm{tg}^2\, x \, \mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x =$

$\begin{bmatrix} u = \sin^2 x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 2 \sin x \cos x & v = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{bmatrix} = \sin^2 x \dfrac{\sin x}{\cos x} - \int 2 \sin x \cos x \dfrac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x =$

$\dfrac{\sin^3 x}{\cos x} - 2 \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + C \\ \text{(Úloha 3.1)} \end{bmatrix} =$

$\dfrac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + C = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x} - x + \sin x \cos x + C.$ □

## 3.1 Výpočet $I_c$ a $I_s$

**Úloha 3.4.** *Vypočtěte*

$$I_c = \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \ \mathrm{d}x, \quad I_s = \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \ \mathrm{d}x$$

*(budeme počítat primitivní funkce pro $C = 0$).*

*Řešení.* V integrálu $I_c$ se použije dvěma způsoby metoda per partes: a) pro $u = \cos bx$ a $v' = \mathrm{e}^{ax}$, b) pro $u = \mathrm{e}^{ax}$, $v' = \cos bx$:

a) $I_c = \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \cos bx & v' = \mathrm{e}^{ax} \\ u' = -b \sin bx & v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} \cos bx + \dfrac{b}{a} \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x =$
$\dfrac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} \cos bx + \dfrac{b}{a} I_s.$

b) $I_c = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^{ax} & v' = \cos bx \\ u' = a\,e^{ax} & v = \frac{1}{b}\sin bx \end{array}\right] = \frac{1}{b}\,e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx \, dx = \frac{1}{b}\,e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_s.$

Tím dostaneme soustavu

$$I_c = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_s, \quad I_c = \frac{1}{b}\,e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_s,$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_s &= \frac{1}{b}\,e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_s, \\ \frac{b}{a}I_s + \frac{a}{b}I_s &= \frac{1}{b}\,e^{ax}\sin bx - \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx \quad | \cdot ab, \\ (b^2+a^2)I_s &= a\,e^{ax}\sin bx - b\,e^{ax}\cos bx, \end{aligned}$$

odtud

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax}. \\ I_c &= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_s = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} \\ &= \frac{(a^2+b^2)\cos bx + ab\sin bx - b^2\cos bx}{a(a^2+b^2)}\,e^{ax} = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} \end{aligned}$$

□

## 3.2 Rekurentní vzorec pro integrál $I_n$

**Úloha 3.5.** *Nalezněte rekurentní vzorec pro integrál* $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, $n \geq 2$.

*Řešení.* V integrálu $I_m$, kde $m \geq 1$, položíme $u = \dfrac{1}{(a^2+x^2)^n}$, $v' = 1$ a dostaneme $I_m = \dfrac{x}{(a^2+x^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2I_{m+1}$, odkud vyjádříme $I_{m+1}$. Položíme-li pak $m = n-1$, dostaneme

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

□

**Úloha 3.6.** *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(2^2+x^2\right)^3}$.

*Řešení.* Využijeme rekurentní vzorec pro $I_3$:

$$\begin{aligned}
I &= I_3 = \frac{1}{2(3-1)2^2}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^{3-1}} + \frac{2\cdot 3-3}{2(3-1)2^2} I_{3-1} \\
&= \frac{1}{16}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(2^2+x^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{2(2-1)2^2}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^{2-1}} + \frac{2\cdot n-3}{2(2-1)2^2} I_{2-1}\right) \\
&= \frac{1}{16}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\,\frac{x}{2^2+x^2} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{2^2+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{16}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\,\frac{x}{2^2+x^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{16}\,\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\,\frac{x}{2^2+x^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\right) + C \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{x}{\left(2^2+x^2\right)^2} + \frac{3}{8}\,\frac{x}{2^2+x^2} + \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

□

# 4 Integrace racionálních funkcí

## 4.1 Typy parciálních zlomků a jejich integrace

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+q-q+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\int \frac{-q+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{A}{2}\left(-q+\frac{2b}{A}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \cdots.$$

4. $\displaystyle \frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+q-q+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+q}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\int \frac{-q+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2}\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{A}{2}\left(-q+\frac{2b}{A}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k} = \cdots .$$

Typy 3. a 4. mají ve svých jmenovatelích nerozložitelné polynomy (nemají reálné kořeny).

**Úloha 4.1** (Příklad dopočtu 3. typu). $\displaystyle \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

**Úloha 4.2** (Příklad dopočtu 4. typu). $\displaystyle \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x^2+2x+1)+2]^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \left[\begin{array}{c} u = x+1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+2)^2} = \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C = \frac{1}{4}\frac{x+1}{2+(x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$

## 4.2 Postup při integraci racionálních funkcí $P(x)/Q(x)$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy:

Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy, přičemž využíváme poznatků z algebry.

**Algoritmus:**

(1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: *snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele.*

(2) Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod (3), jinak tento *rozklad jmenovatele* provedeme.

(3) Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod (4); jinak provedeme *rozklad zlomku $R(x)/Q(x)$ na parciální zlomky.*

(4) *Integrujeme* všechny komponenty rozkladu funkce $y = P(x)/Q(x)$.

## 4.3 Příklady na integraci racionálních funkcí

**Úloha 4.3.** *Najděte primitivní funkci* $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

*Řešení.* Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

odkud

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2).$$

Dosazením

$$\begin{array}{rclrclcrcl} x &=& -1: & -1 &=& -4A & \Rightarrow & A &=& \frac{1}{4} \\ x &=& -2: & -2 &=& 5B & \Rightarrow & B &=& -\frac{2}{5} \\ x &=& 3: & 3 &=& 20C & \Rightarrow & C &=& \frac{3}{20} \end{array}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \frac{3}{20}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + c\,.$$

□

**Úloha 4.4.** *Najděte primitivní funkci* $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* Vydělením a rozkladem jmenovatele dostaneme

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

odkud

$$6x^2 + x - 2 = A(2x^2 + 2x + 1) + (Bx + C)(x - 1)\,.$$

Dosazením

$$x \;=\; 1: \;\; 5 \;=\; 5A \;\Rightarrow\; A \;=\; 1$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné $x$

$$\begin{array}{rrcll} x^2: & 6 & = & 2A + B & \Rightarrow\; B \;=\; 4 \\ x^0: & -2 & = & A - C & \Rightarrow\; C \;=\; 3\,. \end{array}$$

Je tedy

$$\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zlomek $\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$ je parciální zlomek 2. druhu, při jeho integraci postupujeme následovně

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

první integrál vpravo řešíme substitucí $t = 2x^2 + 2x + 1$, pak $\mathrm{d}t = (4x+2)\,\mathrm{d}x$ a po dosazení

$$\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln(2x^2 + 2x + 1)\,,$$

ve druhém integrálu upravíme nejprve jmenovatele

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &= 2[x^2 + x] + 1 = 2[(x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}] + 1 = 2(x + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2} = \\ &= \tfrac{1}{2}[4(x + \tfrac{1}{2})^2 + 1] = \tfrac{1}{2}[(2x+1)^2 + 1] \end{aligned}$$

a dále substitucí $t = 2x + 1$, pak $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$ a po dosazení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(2x+1)\,.$$

Výsledkem je tedy

$$\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 + \ln|x-1| + \ln(2x^2 + 2x + 1) + \operatorname{arctg}(2x+1) + c\,.$$

□

**Úloha 4.5.** *Najděte primitivní funkci* $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* Úpravou jmenovatele

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2(x+1)(x^2-1) = x^2(x+1)^2(x-1)$$

a rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-1}\,.$$

Máme

$$\begin{aligned} x^4+1 &= Ax(x+1)^2(x-1) + B(x+1)^2(x-1) + \\ &\quad + Cx^2(x^2-1) + Dx^2(x-1) + Ex^2(x+1)^2, \end{aligned}$$

odkud dosazením

$$\begin{array}{rclrclcrcl} x &=& 0: & 1 &=& -B & \Rightarrow & B &=& -1 \\ x &=& -1: & 2 &=& -2D & \Rightarrow & D &=& -1 \\ x &=& 1: & 2 &=& 4E & \Rightarrow & E &=& \frac{1}{2} \end{array}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné $x$

$$\begin{array}{rrcl} x^4: & 1 &=& A+C+E \\ x^1: & 0 &=& -A-B \end{array}$$

dostaneme $A=1$, $B=-1$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=-1$, $E=\frac{1}{2}$.

Je tedy

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \\ &= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c\,. \end{aligned}$$

$\square$

# 5 Integrace některých iracionálních funkcí

**Úloha 5.1.** *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{4x}}\,\mathrm{d}x.$

*Řešení.* $$I = \int \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{4x}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \mathrm{NSN}\,\{2,3,6\} = 6 \\ x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\sqrt[6]{t^6}}{2\sqrt[3]{t^6} + \sqrt[2]{4t^6}} 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^6}{2t^2 + 2t^3}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^4}{2 + 2t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 3\int \frac{t^4}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C = \begin{bmatrix} x = t^6 \\ t = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}} \end{bmatrix} =$$

$$= 3\left(\frac{x^{\frac{4}{6}}}{4} - \frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} + \frac{x^{\frac{2}{6}}}{2} - x^{\frac{1}{6}} + \ln|x^{\frac{1}{6}} + 1|\right) + C =$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 3\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$ □

**Úloha 5.2.** *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)}}.$

*Řešení.* $$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)\frac{(x-1)}{(x-1)}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^3\frac{(2x-1)}{(x-1)}}} =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}} = \left[\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{2x-1}{x-1} = t^3}, \quad 2x - 1 = (x-1)t^3, \\ 2x - xt^3 = 1 - t^3, \quad x(2-t^3) = 1 - t^3, \quad \boxed{x = \dfrac{1-t^3}{2-t^3}}, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{-3t^2(2-t^3) - (1-t^3)(-3t^2)}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{-6t^2 + 3t^5 + 3t^2 - 3t^5}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t, \quad \boxed{\mathrm{d}x = \dfrac{-3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\dfrac{-3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t}{\left(\dfrac{1-t^3}{2-t^3} - 1\right)\sqrt[3]{t^3}} = \int \frac{\dfrac{-3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t}{\dfrac{1-t^3-2+t^3}{2-t^3}t} = \int \frac{-\dfrac{3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t}{-\dfrac{t}{2-t^3}} =$$

$$= \int \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\frac{2-t^3}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{3t}{2-t^3}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{3t}{(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{-3t}{(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})} = \dfrac{A}{t-\sqrt[3]{2}} + \dfrac{Bt+C}{t^2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} \\ \vdots \end{array}\right] = \cdots. \qquad \square$$

## 5.1 Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $R$ je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. Eulerovy substituce jsou tři:

(1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ [pro $a > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy $ax^2$.

(2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ [pro $c > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy $c$ a rovnost lze dělit $x$.

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ [kde $\lambda$ je reálný kořen]; hlavní myšlenka: po umocnění lze rovnost dělit kořenovým činitelem $(x-\lambda)$.

Po nalezení integrálu z příslušné racionální funkce se vracíme k původní proměnné, tj. dosadíme

- při 1. substituci $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$,
- při 2. substituci to je $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$,
- a při 3. dosadíme $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

**Úloha 5.3.** *Ověřte, že při výpočtu* $\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x$ *lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převeďte integrál na integrál z funkce racionální.*

*Řešení.* $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny, takže jsou splněny předpoklady pro všechny tři Eulerovy substituce:

**1.ES:** Při použití 1. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1}=2x+t$, a tedy

$$\begin{aligned}
4x^2+5x+1 &= 4x^2+4xt+t^2,\\
5x+1 &= 4xt+t^2,\\
5x-4xt &= t^2-1,\\
x(5-4t) &= t^2-1,\\
\boxed{x} &= \boxed{\frac{t^2-1}{5-4t}},\\
\mathrm{d}x &= \frac{2t(5-4t)-(t^2-1)(-4)}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\mathrm{d}x &= \frac{10t-8t^2+4t^2-4}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\boxed{\mathrm{d}x} &= \boxed{\frac{10t-4t^2-4}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t},\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= 2x+t,\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= 2\frac{t^2-1}{5-4t}+t,\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= \frac{2t^2-2+5t-4t^2}{5-4t},\\
\boxed{\sqrt{4x^2+5x+1}} &= \boxed{\frac{-2t^2+5t-2}{5-4t}}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2-1}{5-4t}\cdot\frac{-2t^2+5t-2}{5-4t}\cdot\frac{10t-4t^2-4}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t=\cdots=$$

$$\frac{1}{96}\,t^3-\frac{17}{256}\,t-\frac{243}{2048}\,\frac{1}{(-5+4\,t)^3}-\frac{405}{2048}\,\frac{1}{(-5+4\,t)^2}+\frac{81}{2048}\,\frac{1}{(-5+4\,t)}-$$

$$-\frac{45}{512}\,\ln(-5+4\,t)+C=\left[\text{za } t \text{ dosadíme } \sqrt{4x^2+5x+1}-2x\right]=$$

$$=\frac{1}{96}\left(\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-2\,x\right)^3-\frac{17}{256}\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}+\frac{17}{128}\,x-$$

$$=\frac{243}{2048}\,\frac{1}{\left(-5+4\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)^3}-$$

$$-\frac{405}{2048}\,\frac{1}{\left(-5+4\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)^2}+$$

$$+\frac{81}{2048}\,\frac{1}{\left(-5+4\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)}-$$

$$-\frac{45}{512}\ \ln\left(-5+4\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)+C.$$

**2.ES:** Při použití 2. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1}=xt+1$, a tedy:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+5x+1} &= xt+1,\\
4x^2+5x+1 &= x^2t^2+2xt+1,\\
4x^2+5x &= x^2t^2+2xt,\\
4x+5 &= xt^2+2t,\\
4x-xt^2 &= 2t-5,\\
\boxed{x} &= \boxed{\frac{2t-5}{4-t^2}},\\
\mathrm{d}x &= \frac{2(4-t^2)-(2t-5)(-2)}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\boxed{\mathrm{d}x} &= \boxed{\frac{-2t^2+4t-2}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t},\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= \frac{2t-5}{4-t^2}t+1\\
\boxed{\sqrt{4x^2+5x+1}} &= \boxed{\frac{2t^2-t-t^3}{4-t^2}}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2t-5}{4-t^2}\cdot\frac{2t^2-t-t^3}{4-t^2}\cdot\frac{-2t^2+4t-2}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{64}\,\frac{1}{(t-2)^4}-\frac{3}{128}\,\frac{1}{(t-2)^3}+\frac{23}{512}\,\frac{1}{(t-2)^2}+\frac{27}{256}\,\frac{1}{(t-2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{729}{64}\,\frac{1}{(t+2)^4}-\frac{1539}{128}\,\frac{1}{(t+2)^3}+\frac{1809}{512}\,\frac{1}{(t+2)^2}-\frac{27}{256}\,\frac{1}{(t+2)}\right)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{192}\,\frac{1}{(t-2)^3}+\frac{3}{256}\,\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{23}{512}\,\frac{1}{(t-2)}+\frac{27}{256}\,\ln(t-2)-$$

$$-\frac{243}{64}\,\frac{1}{(t+2)^3}+\frac{1539}{256}\,\frac{1}{(t+2)^2}-\frac{1809}{512}\,\frac{1}{(t+2)}-\frac{27}{256}\,\ln(t+2)+C=$$

$$=\left[\text{za } t \text{ dosadíme } \frac{\sqrt{4x^2+5x+1}-1}{x}\right]=$$

$$=\frac{1}{192}\,\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}-2\right)^{-3}+\frac{3}{256}\,\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}-2\right)^{-2}-$$

$$\frac{23}{512}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}-2\right)^{-1}+\frac{27}{256}\ln\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}-2\right)-$$
$$\frac{243}{64}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}+2\right)^{-3}+\frac{1539}{256}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}+2\right)^{-2}-$$
$$\frac{1809}{512}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}+2\right)^{-1}-\frac{27}{256}\ln\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x}+2\right)+$$
$C.$

**3.ES:** Při použití 3. substituce máme

$$\sqrt{4x^2+5x+1}=\sqrt{(x+1)(4x+1)}=\sqrt{4(x+1)(x+\frac{1}{4})}=t(x+1),$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)(4x+1)} &= t(x+1),\\
(x+1)(4x+1) &= t^2(x+1)^2,\\
(4x+1) &= t^2(x+1),\\
4x-xt^2 &= t^2-1,\\
\boxed{x} &= \boxed{\frac{t^2-1}{4-t^2}},\\
\mathrm{d}x &= \frac{2t(4-t^2)-(t^2-1)(-2t)}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\boxed{\mathrm{d}x} &= \boxed{\frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2-1}{4-t^2}\cdot t\left(\frac{t^2-1}{4-t^2}+1\right)\cdot\frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{4-t^2}\cdot\left(\frac{3t}{4-t^2}\right)\cdot\frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=18\int\frac{(t^2-1)t^2}{(4-t^2)^4}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{18}{13}t^{13}-\frac{306}{11}t^{11}+224\,t^9-\frac{6336}{7}t^7+\frac{9216}{5}t^5-1536\,t^3+C=$$

$$=\left[\text{za } t \text{ dosadíme } \frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{x+1}\right]=$$

$$=\frac{18}{13}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{13}-\frac{306}{11}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{11}+$$

$$+224\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^9-\frac{6336}{7}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^7+$$

$$+\frac{9216}{5}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^5-1536\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^3+C.$$

□

# 6 Určitý integrál

## Newtonův vzorec

**Věta 6.1** (Newtonův vzorec)**.** *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci $F$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\big[F(x)\big]_{x=a}^{b}=F(b)-F(a).$$

# 7 Další integrační metody (pro určitý i neurčitý integrál)

## 7.1 Integrace goniometrických funkcí

**Přehled substitucí pro $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$, kde $R$ je racionální funkce dvou proměnných:**

(1) $\sin x = t$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(2) $\cos x = t$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(3) $\operatorname{tg} x = t$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$,

(4) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ (univerzální substituce). $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

**Převeďte na integrál z racionální funkce:**

**Úloha 7.1.** $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$.

*Řešení.* $$I = \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{2t+1-t^2} = \cdots. \qquad \square$$

**Úloha 7.2.** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* $$I = \left[\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4\right] = \frac{1}{4}\left[\sin^4 x\right]_{x=0}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

**Úloha 7.3.** $I = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \cos^5 2x \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* $$I = \left[\begin{array}{c} \cos 2x = t \\ -2\sin 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^5\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{12}\left[t^6\right] =$$

$$= -\frac{1}{12}\left[\cos^6 2x\right]_{x=-\pi/4}^{0} = -\frac{1}{12}(\cos^6 0 - \cos^6(-\pi/2)) = -\frac{1}{12}(1-0) = -\frac{1}{12}. \qquad \square$$

**Úloha 7.4.** *Vypočtěte* $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ *takto: Čtyřmi různými substitucemi převeďte příslušný neurčitý integrál* $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ *na integrál z racionální funkce, z těchto čtyř výsledků vyberte ten nejjednodušší a příklad dopočítejte jen tímto jedním způsobem.*

*Řešení.*

$$t = \sin x: \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\frac{\cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$t = \cos x: \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ -\mathrm{d}t = \sin x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{t}(-\mathrm{d}t) = \int \frac{t^2-1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \boxed{\boxed{\int \left(t - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$t = \operatorname{tg} x: \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \end{array}\right] = \int \frac{\sin^3 x\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^4 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^3 x\cos^4 x\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{t^2+1} \\ \cos^4 x = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{array}\right] = \int t^3 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}: \qquad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{16t^3}{(1+t^2)^3(1-t^2)}\, \mathrm{d}t$$

Dopočítáme nejjednodušší tvar (v rámečku):

$$\int \left(t - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

Určitý integrál:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x|\right]_{x=0}^{\pi/4} = \\
&= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{2} - \ln|\cos \frac{\pi}{4}| - \left(\frac{\cos^2 0}{2} - \ln|\cos 0|\right) = \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \ln|\frac{\sqrt{2}}{2}| - \left(\frac{1}{2} - \ln|1|\right) = \frac{1}{4} - \ln|\frac{1}{\sqrt{2}}| - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \\
&= \frac{1}{4} - \ln|2^{-\frac{1}{2}}| - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

□

## 7.2 Integrace součinu goniometrických funkcí

$$\begin{aligned}
\sin nx \sin mx &= \frac{1}{2}\Big[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\Big], \\
\sin nx \cos mx &= \frac{1}{2}\Big[\sin(n-m)x + \sin(n+m)x\Big], \\
\cos nx \cos mx &= \frac{1}{2}\Big[cos(n-m)x + \cos(n+m)x\Big], \\
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\
\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}.
\end{aligned}$$

**Úloha 7.5.** *Vypočtěte* $I = \int \sin 3x \sin 4x \,\mathrm{d}x.$

*Řešení.* Integrand upravíme pomocí vzorce v rámečku:

$$I = \int \frac{1}{2}\Big[\cos(3-4)x - \cos(3+4)x\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big[\cos(-x) - \cos 7x\Big]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \cos(x)\,\mathrm{d}x - \int \cos 7x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \frac{\sin 7x}{7}\right) + C. \qquad \square$$

## 7.3 Goniometrické a hyperbolické substituce

**Přehled substitucí:**

(1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x$, substituce $x = a\sin t$ (nebo $x = a\,\mathrm{th}\,t$),

(2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)\mathrm{d}x$, substituce $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (nebo $x = a\,\mathrm{sh}\,t$),

(3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)\mathrm{d}x$, substituce $x = \dfrac{a}{\cos t}$ (nebo $x = a\,\mathrm{ch}\,t$).

**Úloha 7.6.** *Vypočtěte* $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

*Řešení.* Zřejmě jde o případ (1), kde $a = 1$. Použijeme substituci $x = 1\sin t$.

$$I = \int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \\ 1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \pi/2 \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} z = \cos t \\ \mathrm{d}z = -\sin t\,\mathrm{d}t \\ -\mathrm{d}z = \sin t\,\mathrm{d}t \end{array}\right] =$$

$$= -\int_?^? z^2\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{3}z^3\right]_{z=?}^{?} = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{x=0}^{\pi/2} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Při přechodu od $x$ k $t$ jsme meze transformovali, ve druhém případě ne, stačilo, že jsme se nakonec vrátili k proměnné $t$. $\square$

**Úloha 7.7.** *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

*Řešení.* Nejprve je potřeba převést integrand na potřebný tvar (pomocí doplnění na čtverec a substituce:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{[(x+2)^2+3]^3}} = \left[\begin{array}{c} z = x+2 \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{[z^2+3]^3}} = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+3}^3} = \left[\begin{array}{c} \text{subst. č. (2), kde } a = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t \\ \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ z^2+3 = 3\,\mathrm{tg}^2\,t + 3 = \\ = 3(\mathrm{tg}^2\,t+1) = 3\frac{1}{\cos^2 t} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}}{\sqrt{3\frac{1}{\cos^2 t}}^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}}{\left(\sqrt{3}\frac{1}{\cos t}\right)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + C. \qquad \square$$

**Úloha 7.8.** *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \text{subst. č. (3), kde } a = 1 \\ x = \frac{1}{\cos t} \\ \mathrm{d}x = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{tg}\,t\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] =$

$$= \int \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 - 1}}{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2}\,\mathrm{tg}\,t\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\frac{\cos t}{\cos^2 t}}\,\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\frac{1}{\cos t}}\,\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cos t\,\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{d}t = \int \sin t\,\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{d}t = \cdots. \qquad \square$$

## 7.4 Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right).$$
$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \mathrm{e}^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

**Úloha 7.9.** *Vypočtěte* $I = \int \mathrm{e}^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x$.

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
I &= \left[\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)\right] = \int \mathrm{e}^{2x} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right) x \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{e}^{2x+ix} \, \mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{2x-ix} \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{e}^{(2+i)x} \, \mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{(2-i)x} \, \mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+i} \mathrm{e}^{(2+i)x} + \frac{1}{2-i} \mathrm{e}^{(2-i)x}\right) + C = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+i}\frac{2-i}{2-i} \mathrm{e}^{(2+i)x} + \frac{1}{2-i}\frac{2+i}{2+i} \mathrm{e}^{(2-i)x}\right) + C = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2-i}{5} \mathrm{e}^{(2+i)x} + \frac{2+i}{5} \mathrm{e}^{(2-i)x}\right) + C = \\
&= \frac{1}{10}\left((2-i) \mathrm{e}^{(2+i)x} + (2+i) \mathrm{e}^{(2-i)x}\right) + C = \\
&= \frac{1}{10} \mathrm{e}^{2x}\left((2-i) \mathrm{e}^{ix} + (2+i) \mathrm{e}^{-ix}\right) + C = \\
&= \frac{1}{10} \mathrm{e}^{2x}\left((2-i)(\cos x + i \sin x) + (2+i)(\cos x - i \sin x)\right) + C = \\
&= \frac{1}{10} \mathrm{e}^{2x}\Big(2\cos x + \sin x - i\cos x + 2i \sin x + \\
&\qquad\qquad + 2\cos x + \sin x + i \cos x - 2i \sin x\Big) + C = \\
&= \frac{1}{10} \mathrm{e}^{2x}\left(4\cos x + 2\sin x + i(-\cos x + 2\sin x + \cos x - 2\sin x)\right) + C = \\
&= \frac{1}{5} \mathrm{e}^{2x}\left(2\cos x + \sin x\right) + C.
\end{aligned}$$

□

## 7.5 Vlastnosti určitého integrálu závislé na integrované funkci

**Věta 7.10** (lineární vlastnosti)**.**

*(1) Je-li $f \in R(\langle a, b\rangle)$, $k \in \mathbb{R}$, pak $kf \in R(\langle a, b\rangle)$ a platí*

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*(2) Je-li $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$, pak $(f+g) \in R(\langle a, b\rangle)$ a platí*

$$\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Věta 7.11** (vlastnosti vyjádřené nerovnostmi). *Nechť $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$.*

*(3) Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.*

*(4) Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

*(5) $|f(x)| \in R(\langle a, b\rangle)$ a platí $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.*

**Úloha 7.12.** *S využitím nerovnosti (4) z předchozí věty dokažte, že*

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\ln 2.$$

*Řešení.* Vyjdeme z nerovnosti pro funkci $\sin x$:

$$|\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

ze které přejdeme na

$$\sin^4 x \leq x^4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrovaný zlomek tedy můžeme na uvažovaném intervalu odhadnout:

$$\frac{x^3}{2-\sin^4 x} \leq \frac{x^3}{2-x^4}, \quad \text{zde pro } x \in [0;1].$$

Podle (4) dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{2-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 \frac{x^3}{2-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{4}\ln(2-x^4)\right]_{x=0}^1 \\
&= -\frac{1}{4}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{4}\ln 2.
\end{aligned}$$

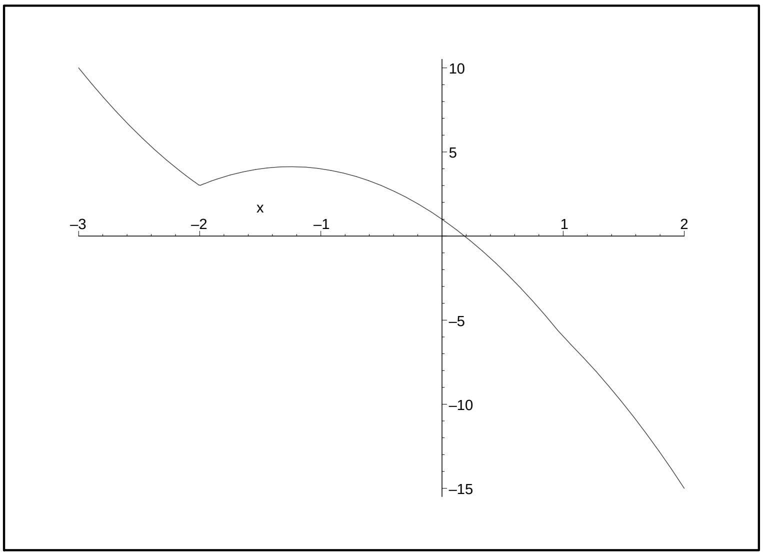
$\square$

## 7.6 Vlastnosti určitého integrálu závislé na intervalu integrování

**Věta 7.13** (aditivita integrálu). *Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a, b\rangle)$, právě když $f \in R(\langle a, c\rangle) \wedge f \in R(\langle c, b\rangle)$. Přitom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Úloha 7.14.** *Vypočtěte* $I = \int_{-3}^{2} |x-1| - 2\,x\,|x+2|\;\mathrm{d}x.$




Obrázek 1: Graf funkce $y = |x-1| - 2\,x\,|x+2|$.

*Řešení.* Pro integraci výrazů s absolutní hodnotou rozdělíme na intervaly:

| $x$ | $\langle -3, -2\rangle$ | $\langle -2, 1\rangle$ | $\langle 1, 2\rangle$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert x-1\rvert$ | $1-x$ | $1-x$ | $x-1$ |
| $\lvert x+2\rvert$ | $-(x+2)$ | $x+2$ | $x+2$ |
| $\lvert x-1\rvert - 2\,x\,\lvert x+2\rvert$ | $1-x+2x(x+2)$ | $1-x-2x(x+2)$ | $x-1-2x(x+2)$ |
| po úpravě | $2x^2+3x+1$ | $-2x^2-5x+1$ | $-2x^2-3x-1$ |

Po rozdělení na tři integrály a dosazení dostaneme:

$$I = \int_{-3}^{-2} (2x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} (-2x^2-5x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-2x^2-3x-1)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní již provedeme výpočet:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-3}^{-2}(2x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{1}(-2x^2-5x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(-2x^2-3x-1)\,\mathrm{d}x= \\
&= \left[(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{x=-3}^{-2}+\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x\right]_{x=-2}^{1}+\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x\right]_{x=1}^{2}= \\
&= \left[\left(\frac{2}{3}(-2)^3+\frac{3}{2}(-2)^2+(-2)\right)-\left(\frac{2}{3}(-3)^3+\frac{3}{2}(-3)^2+(-3)\right)\right]+ \\
&\quad+\left[\left(-\frac{2}{3}1^3-\frac{5}{2}1^2+1\right)-\left(-\frac{2}{3}(-2)^3-\frac{5}{2}(-2)^2+(-2)\right)\right]+ \\
&\quad+\left[\left(-\frac{2}{3}2^3-\frac{3}{2}2^2-2\right)-\left(-\frac{2}{3}1^3-\frac{3}{2}1^2-1\right)\right]= \\
&= \left[\left(-\frac{16}{3}+6-2\right)-\left(-18+\frac{27}{2}-3\right)\right]+\left[\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+1\right)-\left(\frac{16}{3}-10-2\right)\right]+ \\
&\quad+\left[\left(-\frac{16}{3}-6-2\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-1\right)\right]= \\
&= \frac{-16-2-16-16+2}{3}+\frac{-27-5+3}{2}+(4+21+1+12-8+1)= \\
&= -\frac{48}{3}-\frac{29}{2}+31=-16-14-\frac{1}{2}+31=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

## 7.7 Určitý integrál — metoda per partes

**Věta 7.15.** *Jsou-li $u'$, $v'$ spojité na $\langle a,b\rangle$, pak*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_{x=a}^{b}-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Úloha 7.16.** *Vypočtěte $I=\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$.*

*Řešení.*

$$I=\left[\begin{array}{cc} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array}\right]=[-\cos x]_{x=0}^{\pi}+\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x=\cdots=\pi.$$

□

## 7.8 Určitý integrál — metoda substituční

Máme-li při výpočtu určitého integrálu použít substituci, pak můžeme

- nejprve vypočíst primitivní funkci a pak použít Newtonův vzorec,
- nebo můžeme provést *transformaci mezí.* V závislosti na tom, jakou substituci provádíme ($h(x) = t$ nebo $x = \varphi(z)$) použijeme jednu z následujících dvou vět.

**Věta 7.17** (substituce $h(x) = z$)**.** *Nechť $f(x)$ má tvar $f(x) = g\big[h(x)\big]h'(x)$, kde $h'(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $g(z)$ je spojitá pro všechna $z = h(x)$, pokud $x \in \langle a, b\rangle$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g\big[h(x)\big]h'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{h(a)}^{h(b)} g(z)\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

**Úloha 7.18.** *Vypočtěte $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$.*

*Řešení.* Použijeme předchozí větu, neboť zřejmě funkce

$$\sin^3 x \cos x \quad \text{má tvar} \quad g\big[h(x)\big]h'(x),$$

kde

$$h(x) = \sin x \quad \text{a} \quad g(z) = z^3.$$

Dále máme ověřit, že

$$h'(x) = \cos x \quad \text{je spojitá na } \langle a, b\rangle = \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle,$$

což jistě je, a

$$g(z) = z^3 \quad \text{je spojitá pro všechna } z \in h\left(\langle a, b\rangle\right) = \sin\left(\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right) = \langle 0, 1\rangle,$$

což je jistě také pravda.

Substitucí $\sin x = z$ tedy bude

$$I = \left[\begin{array}{cc} h(x) = \sin x = z, & h(a) = \sin 0 = 0 \\ h'(x)\,\mathrm{d}x = \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z, & h(b) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}\right] = \int_0^1 z^3\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

□

**Věta 7.19** (substituce $x = \varphi(z)$)**.** *Nechť $A \leq a < b \leq B$, nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle A, B\rangle$, $\varphi'(z)$ nechť je spojitá na $\langle \alpha, \beta\rangle$ a nechť pro $z \in \langle \alpha, \beta\rangle$ leží $\varphi(z)$ v intervalu $\langle A, B\rangle$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

**Úloha 7.20.** *Vypočtěte* $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

*Řešení.* $I = \left[\begin{array}{cc} x = \sin z & x = 0 \Rightarrow z = 0 \\ \mathrm{d}x = \cos z\,\mathrm{d}z & x = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{1}{2}z + \sin 2z\right]_{z=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

Zde jsme hledali $\alpha$ a $\beta$ z rovnic

$$\sin(\alpha) = \varphi(\alpha) = a = 0,$$

$$\sin(\beta) = \varphi(\beta) = b = 1,$$

a tak máme (nejjednodušší řešení, ale možností je více a je lhostejné, kterou z nich vybereme)

$$\alpha = 0 \quad \text{a} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Máme ověřit, že derivace substituční funkce je spojitá na zvoleném intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, což je jistě pravda, neboť $\varphi'(z) = \cos(z)$ je spojitá funkce. Dále nás zajímá, kam substituční funkce zobrazí interval $\langle \alpha, \beta\rangle = \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$,

$$\varphi\left(\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right) = \langle 0, 1\rangle\,.$$

Zde tedy k rozšíření původního intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$ nedochází, a tak stačí vyšetřit případ $A = a = 0$ a $B = b = 1$, a tedy vyšetřit spojitost původní integrované funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na intervalu $\langle A, B\rangle = \langle 0, 1\rangle$, což zřejmě opravdu je.

□

**Úloha 7.21.** *Vypočtěte* $\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}\,\mathrm{d}x.$

*Řešení.* $\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} z = h(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}, \quad z^2 = \mathrm{e}^x - 1, \quad \mathrm{e}^x = z^2 + 1 \\ \mathrm{d}z = h'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{\mathrm{e}^0 - 1} = 0 \\ x = \ln 5 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{\mathrm{e}^{\ln 5} - 1} = 2 \end{array}\right] =$

$$= \int_0^{\ln 5} \underbrace{2\,\mathrm{e}^x}_{g[h(x)]} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}}_{h'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 5} \underbrace{2\left[\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right)^2 + 1\right]}_{g[h(x)]} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}}_{h'(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \underbrace{2(z^2+1)}_{g(z)}\,\mathrm{d}z = 2\int_0^2 (z^2+1)\,\mathrm{d}z = 2\left[\frac{z^3}{3} + z\right]_{z=0}^2 = 2[(\frac{8}{3}+2)-(0)] = \frac{28}{3}. \quad \square$$

**Poznámka 7.22** (K. Rektorys a kol.: Přehled užité matematiky). *Jak nesmíme provádět integraci substitucí, vyplývá z těchto příkladů:*

**Příklad 7.23.** *Integrál* $\int_1^4 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ *nelze integrovat substitucí* $x = \sin z$, *neboť pro žádný interval* $\alpha \le z \le \beta$ *nebude* $x = \sin z$ *probíhat interval* $\langle 1, 4\rangle$. *Daný integrál lze jistě řešit například substitucí* $\sqrt{x^2-1} = z - x$. *Přitom bude* $1 \le x \le 4$, $1 \le z \le 4 + \sqrt{15}$.

**Příklad 7.24.** *Řešme integrál*

$$\int_0^\pi \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+k\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad k>0,\ k\neq 1.$$

*Substituce:*

$$\operatorname{tg} x = z, \quad \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z, \quad (1+\operatorname{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z; \quad \operatorname{tg}(0)=0,\ \operatorname{tg}(\pi)=0.$$

*Je tedy*

$$\int_0^\pi \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+k\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^0 \frac{\mathrm{d}z}{1+k^2z^2} = 0.$$

*Výsledek je zřejmě nesprávný, neboť integrál z kladné funkce je kladný a nemůžeme dostat jako výsledek nulu. Chyba vzniklá substitucí* $\operatorname{tg} x = z$ *je v tom, že* $\operatorname{tg} x$ *je v* $\langle 0, \pi\rangle$ *nespojitá v bodě* $x = \frac{\pi}{2}$.

# 8 Věta o střední hodnotě integrálního počtu

**Věta 8.1** (o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť* $f \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí* $m \le f(x) \le M$. *Pak existuje číslo* $\mu \in \langle m, M\rangle$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

*Je-li* $f$ *spojitá, pak existuje číslo* $\xi \in \langle a, b\rangle$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$

**Úloha 8.2.** *Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu určete střední hodnotu* $\mu$ *funkce:*

$$y = \sqrt{x} \text{ na intervalu } \langle 0, 4\rangle.$$

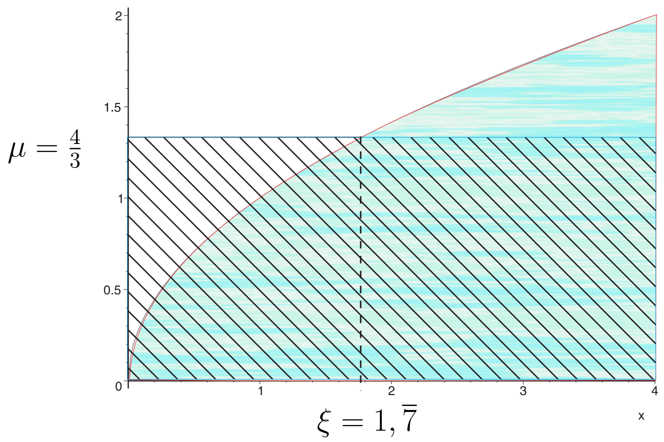
*Řešení.* Podle věty o střední hodnotě $\mu$ vypočteme následovně:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a) \quad\Longrightarrow\quad \mu = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} = \frac{\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(4-0)} = \frac{4}{3}.$$

Funkce $\sqrt{x}$ je na $\langle 0,4\rangle$ spojitá, takže existuje příslušné $\xi$:

$$\mu = f(\xi), \quad \frac{4}{3} = \sqrt{\xi} \quad\Longrightarrow \xi = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1,\overline{7}.$$

Situaci ilustruje následující obrázek:




□

**Úloha 8.3.** *Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu určete střední hodnotu $\mu$ funkce:*

$$y = \sin x \ \textit{na intervalu} \ \langle 0,\pi\rangle\,.$$

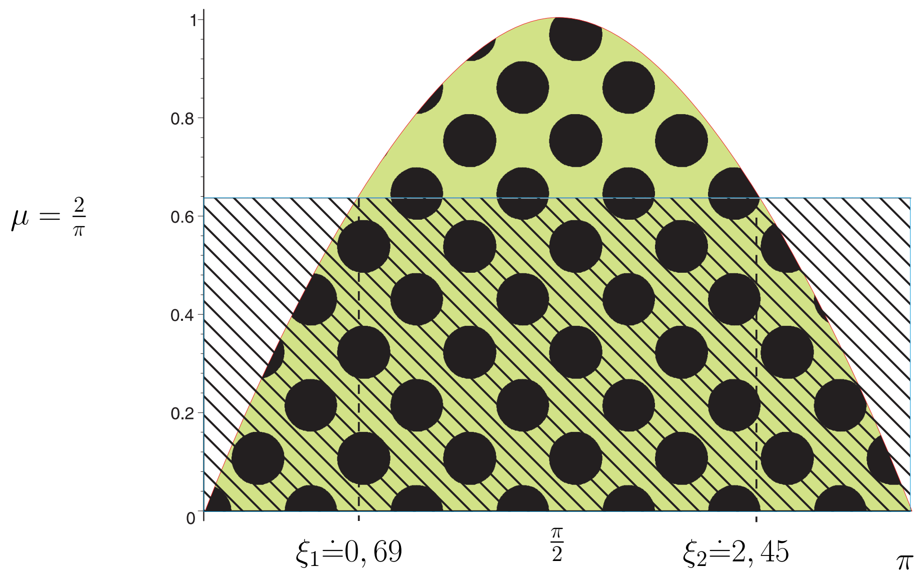
*Řešení.* Podle věty o střední hodnotě $\mu$ vypočteme následovně:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a) \quad\Longrightarrow\quad \mu = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} = \frac{\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x}{(\pi-0)} = \frac{2}{\pi}.$$

Funkce $\sin x$ je na $\langle 0,\pi\rangle$ spojitá, takže existuje příslušné $\xi$ (dokonce dvě):

$$\mu = f(\xi), \quad \frac{2}{\pi} = \sin\xi \quad\Longrightarrow \xi_1 = \arcsin\frac{2}{\pi} \doteq 0,69, \quad \xi_2 = \pi - \xi_1 \doteq 2,45.$$

Situaci ilustruje následující obrázek:

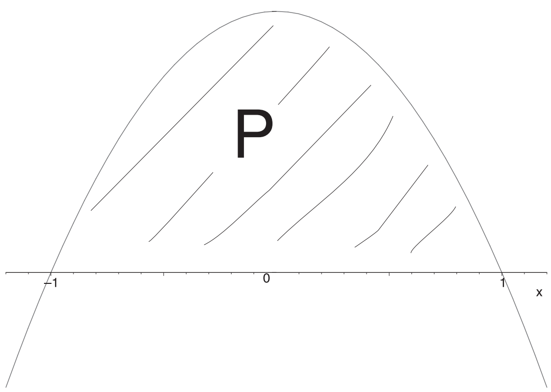



□

# 9 Aplikace určitého integrálu v geometrii

## 9.1 Počáteční úvahy o výpočtu obsahu geometrických útvarů v rovině

**Úloha 9.1.** *Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = 1 - x^2$ a osou $x$.*



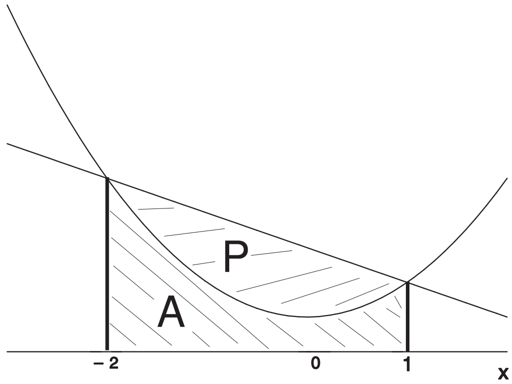

*Řešení.* Po načrtnutí grafu zjistíme, že jde vlastně o úlohu na výpočet určitého integrálu (dotčený graf paraboly leží nad osou $x$), u které ale nejprve musíme nalézt integrační meze. Jde o průsečíky paraboly s osou $x$, tedy nulové body:

$$y = 1 - x^2 = 0, \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = a = -1,\ x_2 = b = 1.$$

$$P = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\ \left[j^2\right].$$

$\square$

**Úloha 9.2.** *Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 1$ a přímkou $y = 3 - x$.*




*Řešení.* Z obrázku je zřejmé, že meze pro výpočet najdeme jako $x$-ové souřadnice průsečíků obou grafů, tedy z rovnice:

$$x^2 + 1 = 3 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2, \quad x_2 = b = 1.$$

Dále z obrázku víme, že

$$A = \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{x=-2}^{1} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 = 6\,[j^2]$$

a

$$A + P = \int_{-2}^{1} (3 - x)\,\mathrm{d}x = \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{1} = 3 - \frac{1}{2} + 6 + 2 = \frac{21}{2}\,[j^2].$$

A tedy dohromady:

$$P = (A + P) - A = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2}\,[j^2].$$

$\square$

## 9.2 Vzorce pro obsah a délku

| | Obsah | Délka křivky |
|---|---|---|
| Explicitně | $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ | $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ |
| Parametricky | $\left\lvert \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}x \right\rvert = \left\lvert \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert$ | $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ |
| Polárně | $\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ | $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$ |

## 9.3 Plocha rovinných obrazců

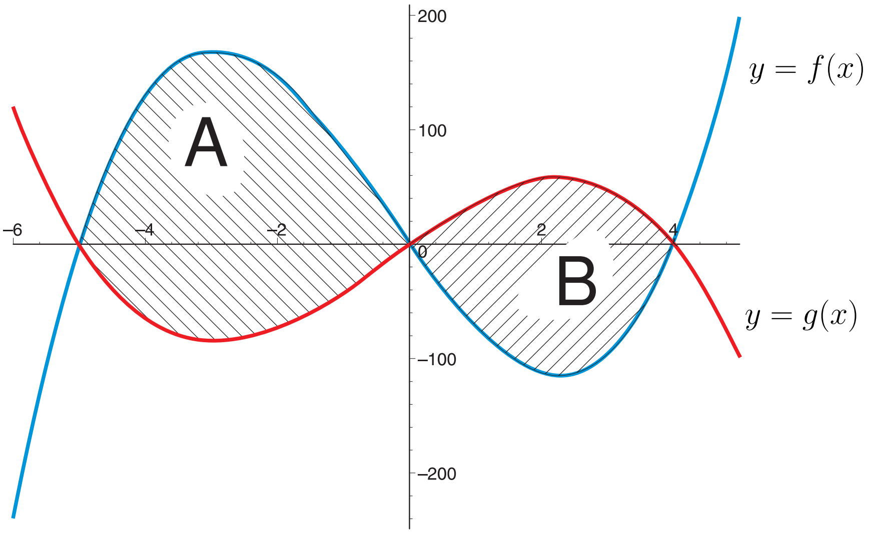
**Úloha 9.3.** *Grafy funkcí $f$ a $g$ vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:*

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 80x, \quad g(x) = -2x^3 - 2x^2 + 40x.$$

*Řešení.* Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:




Ze znalosti vzájemné velikosti $f(x)$ a $g(x)$ na intervalech $\langle -5, 0\rangle$ a $\langle 0, 4\rangle$ dostaneme plochy oblastí $A$ a $B$:

$$P = P_A + P_B = \int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \Big(g(x) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}x,$$

pokud bychom neznali jejich uspořádání, stačí vzít:

$$P = P_A + P_B = \left|\int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right|,$$

nebo dokonce

$$P = \int_{-5}^{4} \Big|f(x) - g(x)\Big|\,\mathrm{d}x.$$

Pro konečný výpočet použijeme prostřední vztah:

$$\begin{aligned} \int \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x &= \int \Big(\big(4x^3 + 4x^2 - 80x\big) - \big(-2x^3 - 2x^2 + 40x\big)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \Big(6x^3 + 6x^2 - 120x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \left|\int_{-5}^{0}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{3}{2}x^4+2x^3-60x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{3}{2}x^4+2x^3-60x^2\right]_{0}^{4}\right| \\
&= \left|\frac{1625}{2}\right| + |-448| = \frac{2521}{2}.
\end{aligned}$$

□

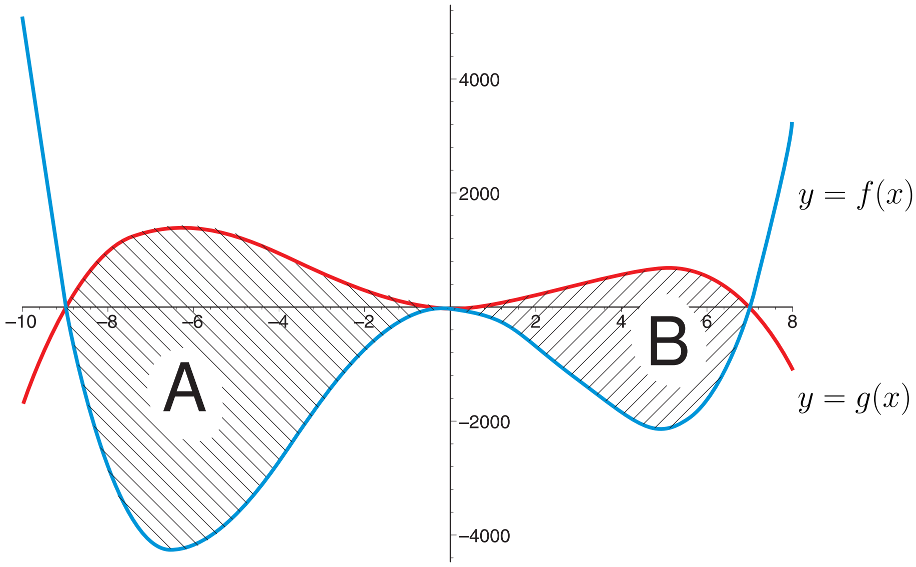
**Úloha 9.4.** *Grafy funkcí $f$ a $g$ vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:*

$$f(x) = 3x^4+6x^3-189x^2, \quad g(x) = -x^4-2x^3+63x^2.$$

*Řešení.* Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \quad\Longrightarrow\quad x_1=-9,\ x_2=x_3=0,\ x_4=7.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:




Nebudeme hledat uspořádání funkcí na intervalech $\langle -9,0\rangle$ a $\langle 0,7\rangle$, a přímo vezmeme:

$$P = P_A + P_B = \left|\int_{-9}^{0}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{7}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right|.$$

$$\begin{aligned}
\int\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x &= \int\Big((3x^4+6x^3-189x^2)-(-x^4-2x^3+63x^2)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\Big(4x^4+8x^3-252x^2\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^5+2x^4-84x^2+C.
\end{aligned}$$

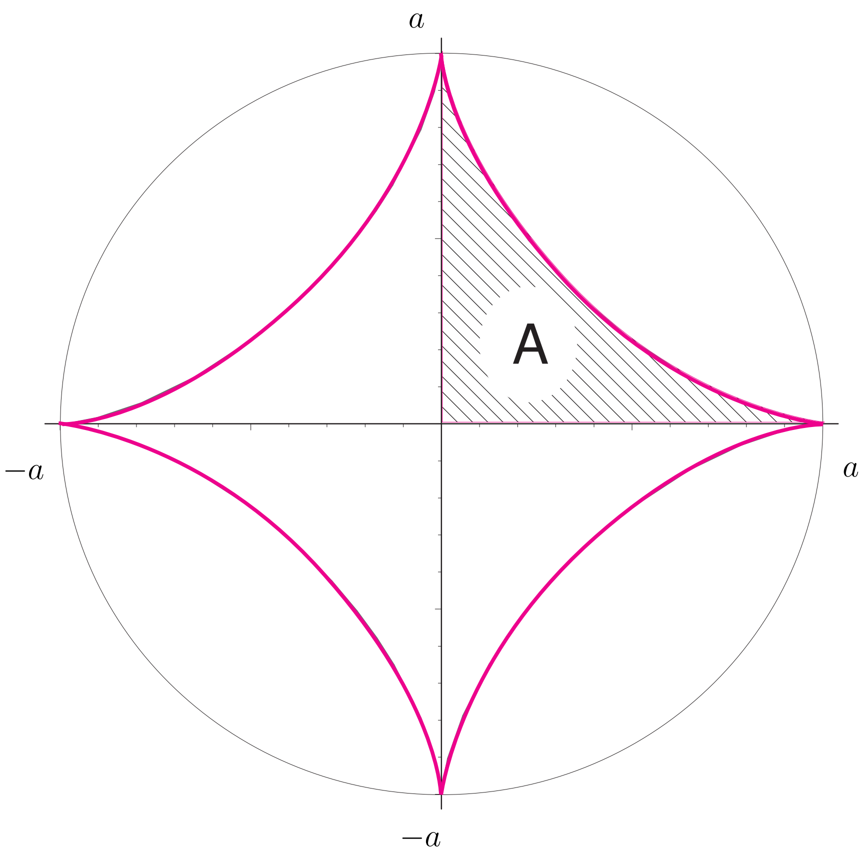
$$
\begin{aligned}
P &= \left|\int_{-9}^{0}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{7}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{3}{2}\frac{4}{5}x^5+2x^4-84x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{4}{5}x^5+2x^4-84x^2\right]_{0}^{4}\right| \\
&= \left|-\frac{135594}{5}\right| + \left|-\frac{52822}{5}\right| = \frac{188416}{5}.
\end{aligned}
$$

□

**Úloha 9.5.** *Určete obsah asteroidy* $\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t, \\ y &=& a\sin^3 t, \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.}$

*Řešení.* Máme tedy $\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t = \varphi(t), \\ y &=& a\sin^3 t = \psi(t), \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$

Na následujícím obrázku je znázorněna asteroida a postup výpočtu (vyjdeme ze symetrie asteroidy, a tak vypočteme obsah obrazce $A$ jako čtvrtinu obsahu celé asteroidy):



Použijeme vzorec pro výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce zadané parametricky:

$$
\begin{aligned}
P_A &= \left|\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(a\sin^3 t\big)\big(a3\cos^2 t(-\sin t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right| = \left[\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t\cos^2 t = \frac{\sin^2 2t}{4}\right] \\
&= \left|-\frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\sin^2 2t\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos 4t-\cos 2t+\cos 2t\cos 4t\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left[\cos 2t\cos 4t = \frac{\cos 6t+\cos 2t}{2}\right] \\
&= \left|-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{\cos 6t+\cos 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos 2t-2\cos 4t+\cos 6t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\left[\left(2t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{6}\sin 6t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\Big(\big(2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}0+\frac{1}{6}0\big)-\big(2\cdot 0-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}0+\frac{1}{6}0\big)\Big)\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\pi\right| = \frac{3}{32}\pi a^2
\end{aligned}
$$

A tedy celková plocha asteroidy je

$$P = 4P_A = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

□

## 9.4 Délka oblouku (křivky)

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t$$

**Úloha 9.6.** *Určete délku oblouku asteroidy* $\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t, \\ y &=& a\sin^3 t, \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle.}$

*Řešení.*

$$\begin{aligned}
x' &= -3a\cos^2 t \sin t, \\
x' &= -3a\cos^2 t \sin t, \\
x'^2 + y'^2 &= 9a^2\Big(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t\Big) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big) \\
&= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \\
s &= \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = 3a \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.
\end{aligned}$$

(*Funkce* $\sin t$ *i* $\cos t$ *jsou na intervalu* $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *nezáporné, takže po odmocnění není třeba psát absolutní hodnotu.*)

$\boxed{\text{Délka oblouku asteroidy je} \quad s = \dfrac{3}{2}a.}$

(*Celková délka asteroidy je tedy* $4s = 6a$.) □

## Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose $x$.

Element objemu je

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}V = P(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

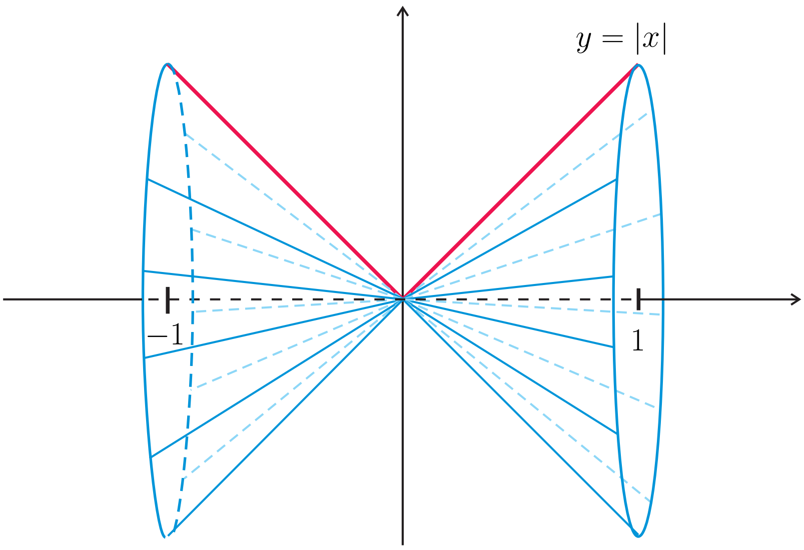
b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa $x$ a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce $f$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b \Big[f(x)\Big]^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x.$$

**Úloha 9.7.** *Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce* $y = |x|$ *kolem osy* $x$ *na intervalu* $\langle -1, 1\rangle$.

*Řešení.* Vyjdeme ze vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $f$ kolem osy $x$:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^1 |x|^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ [j^3].$$

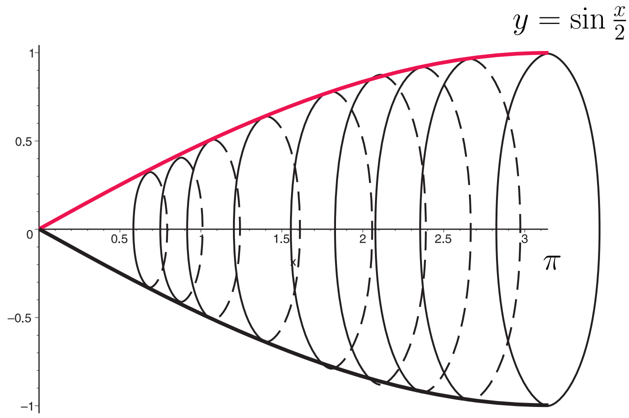



□

**Úloha 9.8.** *Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce* $y = \sin\frac{x}{2}$ *kolem osy* $x$ *na intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$.

*Řešení.* Obdobně jako u předchozí úlohy:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[x - \sin x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2\ [j^3].$$




□

## Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky $l$ kolem osy $x$. Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s,$$

takže diferenciál povrchu plochy je

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \,\mathrm{d}s.$$

Je-li křivka $l$ dána parametricky:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t), \\ y & = & \psi(t), \end{array} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2} \,\mathrm{d}t,$$

je-li křivka $l$ dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \,\mathrm{d}x.$$

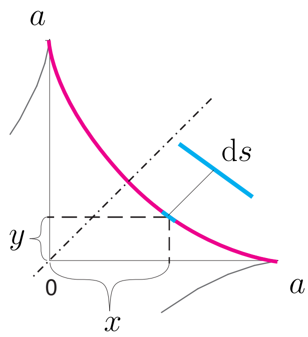
**Úloha 9.9.** *Vypočtěte povrch tělesa vzniklého rotací grafu asteroidy kolem osy $x$.*

*Řešení.* Ze symetrie asteroidy vyplývá, že celkový povrch získáme jak dvojnásobek povrchu tělesa vzniklého rotací prvního oblouku asteroidy kolem osy $x$:

$$\begin{aligned} P &= 2\left(2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \,\mathrm{d}s\right) = 2\left(2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \, 3a \sin t \cos t \,\mathrm{d}t\right) = \\ &= 12\pi a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t \,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

□

## 9.5 Těžiště oblouku




Nahrazení tělesa hmotným bodem o stejné hmotnosti umístěným v těžišti $\Longrightarrow$ stejné statické momenty vůči osám.

Hmotnost křivky $m = \sigma s$, při jednotkové měrné hmotnosti: $\sigma = 1 \Rightarrow m = s$.

Těžiště: $T\left[x_T; y_T\right].$

Těleso:
$$\begin{aligned} m &= s \\ M_x &= \int_\alpha^\beta x \,\mathrm{d}s, \\ M_y &= \int_\alpha^\beta y \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Hmotný bod:
$$\begin{aligned} M_x &= m y_T \Rightarrow y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta x \,\mathrm{d}s}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s}, \\ M_y &= m x_T \Rightarrow x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta y \,\mathrm{d}s}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

**Úloha 9.10.** *Určete těžiště jednoho oblouku asteroidy.*

*Řešení.* Z dřívějška víme, že délka (a tedy i hmotnost při jednotkové délkové hustotě) jednoho oblouku asteroidy je

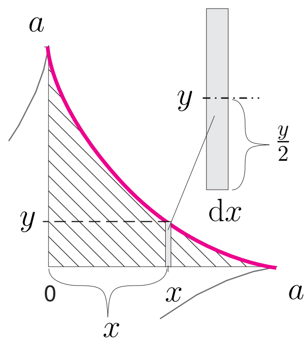
$$m = s = \frac{3}{2}a.$$

Vzhledem k tomu, že uvažovaný oblouk asteroidy leží v prvním kvadrantu a je symetrický vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu (viz obrázek), tak jeho těžiště leží na této ose, takže $y_T = x_T$.

$$\begin{aligned} y_T &= x_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}s}{s} = \frac{\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\ 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}a} \\ &= 2a\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = 2a\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = 2a\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{2}{5}a\,. \end{aligned}$$

Těžiště prvního oblouku asteroidy tedy leží v bodě $T = \left[\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a\right]$. □

## 9.6 Těžiště plochy




Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku $\Delta x$ ($=$ d$x$).

Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose $x$ je

$$\mathrm{d}M_x = (y\,\mathrm{d}x)\cdot\sigma\cdot\frac{1}{2}y$$

(hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně

$$\mathrm{d}M_y = (y\,\mathrm{d}x)\cdot\sigma\cdot x.$$

Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x, \quad M_y = \sigma\int_a^b xy\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost $m$ celé desky.

Proto

$$mx_T = M_y, \quad my_T\eta = M_x$$

a z toho (po zkrácení $\sigma$)

$$x_T = \frac{\displaystyle\int_a^b xy\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y\,\mathrm{d}x}, \qquad y_T = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y\,\mathrm{d}x}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose $x$, tj. je-li

$$a \le x \le b, \quad y_1 \le y \le y_2,$$

pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{\displaystyle\int_a^b x(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}, \qquad y_T = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{(y_2 + y_1)}{2}(y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x}.$$

**Úloha 9.11.** *Určete těžiště „prvního kvadrantu“ asteroidy*

*Řešení.* Z dřívějška víme, že plocha (a tedy i hmotnost při jednotkové plošné hustotě) prvního kvadrantu asteroidy je

$$m = P = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

A opět ze symetrie

$$\begin{aligned}
x_T &= y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{P} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t 3a\cos^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right|}{\frac{3}{8}\pi a^2} = \\
&= \frac{\left|\frac{3}{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right|}{\frac{3}{8}\pi a^2} = \frac{4a}{\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2)^3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t\right| = \\
&= \left[\begin{array}{c} \cos t = z \\ -\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}z \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \text{přehození} \\ \text{znaménka} \\ \text{a mezí} \end{array}\right] = \frac{4a}{\pi}\left|\int_0^1 (1-z^2)^3 z^2\,\mathrm{d}z\right| = \\
&= \frac{4a}{\pi}\left|\int_0^1 \left((1-3z^2+3z^4-z^6)z^2\right)\,\mathrm{d}z\right| = \frac{4a}{\pi}\left|\int_0^1 \left(z^2-3z^4+3z^6-z^8\right)\,\mathrm{d}z\right| = \\
&= \frac{4a}{\pi}\left|\left[\frac{z^3}{3}-\frac{3z^5}{5}+\frac{3z^7}{7}-\frac{z^9}{9}\right]_0^1\right| = \frac{4a}{\pi}\left|\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right| = \frac{4a}{\pi}\left|\frac{16}{315}\right| = \frac{64}{315}\frac{a}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

□