Kombinatorika a úvod do pravděpodobnosti

Jiří Fišer

26. září 2012

1 Kombinatorika

- Variace k-té třídy z n prvků:

  = uspořádané skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

- Permutace n prvků:

  = uspořádané n-tice vybrané z n prvků.

- Kombinace k-té třídy z n prvků:

  = (neuspořádané) skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

1.1 Počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Úloha 1.1. *Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Z prvků této množiny máme vytvářet dvojice, přičemž záleží na pořadí a prvky se nemohou opakovat.*

Úloha 1.2. *Na startu běžeckého závodu je osm atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?*

1.2 Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{V_k^*(n) = n^k.}$$

Úloha 1.3. *Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4 a 5?*

Úloha 1.4. *Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?*

Řešení. Počet 1-znakových ($-\quad\cdot$) + počet 2-znakových ($-\,-\quad -\,\cdot\quad \cdot\,-\quad \cdot\cdot$) $+\cdots+$ počet 5-znakových ($-----\quad\ldots\quad -\cdots\cdot\quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$), tedy $V_1^*(2)+V_2^*(2)+V_3^*(2)+V_4^*(2)+V_5^*(2) = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = 2+4+8+16+32 = 62.$ □

1.3 Počet permutací n prvků bez opakování

$$\boxed{P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.}$$

Úloha 1.5. *Najděte všechny permutace bez opakování z prvků množiny* $M = \{1, 7, 9\}$.

1.4 Počet permutací n prvků s opakováním

$$\boxed{P^*(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}}$$

Úloha 1.6. *Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?*

1.5 Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

Úloha 1.7. *Jaký je vztah mezi počty variací a kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování?*

1.6 Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!}.}$$

Úloha 1.8. *Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu* $\langle 2;15\rangle$.

1.7 Kombinatorika: souhrnný příklad

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}} \qquad \boxed{P(n) = n!} \qquad \boxed{C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Úloha 1.9. *Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4 a 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:*

a) pětimístná, sudá;

b) pětimístná, končící dvojčíslím 21;

c) pětimístná, menší než 30 000;

d) trojmístná lichá;

e) čtyřmístná, větší než 2 000;

f) dvojmístná nebo trojmístná.

2 Pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu}}{\text{počet všech možných výsledků}} \Longrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

- $P(A) = 0$ — nemožný jev;
- $P(A) = 1$ — jistý jev;
- $P(A') = 1 - P(A)$ — past opačného jevu;

Úloha 2.1. *Vypočtěte pravděpodobnost uhádnutí všech šesti čísel při tažení šesti čísel ze čtyřiceti devíti.*

Řešení.

$$P(A) = \frac{1}{C_6(49)} = \frac{1}{\frac{49!}{6!43!}} = \frac{1}{13\,983\,816} \doteq 7{,}1 \cdot 10^{-8} = 0{,}000\,000\,071.$$

□

Úloha 2.2. *Vypočtěte pravděpodobnost uhádnutí právě tří čísel při tažení šesti čísel ze čtyřiceti devíti.*

Řešení. Tipujeme 6 čísel. Počítáme pravděpodobnost vylosování právě 3 čísel z těchto 6. Existuje $C_3(6)$ možných trojic našich čísel. Ke každé z těchto trojic je $C_3(43)$ možností, jak doplnit naši vylosovanou trojici trojicí čísel mimo náš tip $(49 - 6 = 43)$.

Celkový počet možností, kdy ve vylosované šestici jsou právě tři čísla z našeho tipu je tedy rovna součinu těchto hodnot. Výsledná pravděpodobnost:

$$P(A) = \frac{\begin{array}{c}\text{počet trojic}\\ \text{z tipu}\end{array} \times \begin{array}{c}\text{počet trojic}\\ \text{mimo tip}\end{array}}{\text{celkový počet šestic}} = \frac{C_3(6) \cdot C_3(43)}{\frac{49!}{6!43!}} \doteq 0{,}017\,65.$$

□

Úloha 2.3. *40 studentů má být náhodně rozděleno do 4 stejně početných skupin. Mezi studenty jsou i Adam a Eva. Jaká je past, že budou zařazeni do téže skupiny?*

Řešení.

- Studenty náhodně očíslujeme čísly 1–40. Studenti 1–10 tvoří první skupinu, atd.
- Takto Adam a Eva též dostanou svá čísla, resp. uspořádanou dvojici čísel, celkově pro ně $V_2(40)$ možností.
- Kolik z nich je příznivých? Pro každou skupinu je to $V_2(10)$ možností. Skupiny jsou čtyři.

$$P(A) = \frac{4 \cdot V_2(10)}{V_2(40)} = \frac{9}{39} \doteq 0{,}23.$$

□

2.1 Sčítání pastí a podmíněná past

- $A \cup B$ — nastává alespoň jeden z jevů A a B;
- $A \cap B$ — nastávají oba jevy A a B;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- Nezávislé jevy:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$
- Podmíněná past:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};$$
- Podmíněná pro nezávislé:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Úloha 2.4. *Hod dvěma kostkami, bílou a černou:*

- *Jev A: na bílé kostce padne číslo* ≥ 3*;*
- *Jev B: na černé kostce padne číslo* ≤ 3.

$P(A) =?$, $P(B) =?$, $P(A \cap B) =?$, $P(A \cup B) =?$, $P(A/B) =?$ *a* $P(B/A) =?$.

$$\begin{pmatrix} \text{Hodnota} & & \text{Hodnota} \\ \text{na bílé} & , & \text{na černé} \\ \text{kostce} & & \text{kostce} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
(1,\mathbf{1}) & (1,\mathbf{2}) & (1,\mathbf{3}) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,\mathbf{1}) & (2,\mathbf{2}) & (2,\mathbf{3}) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
\hline
(\mathbf{3},\mathbf{1}) & (\mathbf{3},\mathbf{2}) & (\mathbf{3},\mathbf{3}) & (\mathbf{3},4) & (\mathbf{3},5) & (\mathbf{3},6) \\
(\mathbf{4},\mathbf{1}) & (\mathbf{4},\mathbf{2}) & (\mathbf{4},\mathbf{3}) & (\mathbf{4},4) & (\mathbf{4},5) & (\mathbf{4},6) \\
(\mathbf{5},\mathbf{1}) & (\mathbf{5},\mathbf{2}) & (\mathbf{5},\mathbf{3}) & (\mathbf{5},4) & (\mathbf{5},5) & (\mathbf{5},6) \\
(\mathbf{6},\mathbf{1}) & (\mathbf{6},\mathbf{2}) & (\mathbf{6},\mathbf{3}) & (\mathbf{6},4) & (\mathbf{6},5) & (\mathbf{6},6)
\end{array}$$

- $P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$
- $P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3},$
- $P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = P(A) \quad P(B/A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = P(B).$

Úloha 2.5. *Jaká je past, že ve skupině n lidí jsou alespoň dva, kteří mají narozeniny ve stejný den v roce?*

Řešení.
- jev A_n: ...
- opačný jev A'_n: „žádní dva lidé nemají společné narozeniny“.

$$P(A_n) = 1 - P(A'_n) = 1 - \frac{V_n(365)}{V^*_n(365)} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}.$$

Vyčíslíme pro $n = 2, 3, 30, 33, 35$:

$$P(A_2) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-2)!}}{365^2} = \frac{1}{365} \doteq 0{,}002\,739\,726.$$

1	2	5	10	15	20	25	30	40	50
0	0,002 7	0,027	0,12	0,25	0,41	0,57	0,71	0,89	0,.97

□