Matematika 1

Jiří Fišer

20. září 2011

Zimní semestr — KMA–MAT1

1. Úprava algebraických výrazů. Číselné obory.
2. Kombinatorika, základy teorie pravděpodobnosti a statistiky.
3. Základy lineární algebry: *Vektory, matice, determinanty a řešení soustav lineárních rovnic (věta Frobeniova a Cramerova)*.
4. Posloupnosti a jejich limity, řady.
5. Funkce: *Inverzní funkce, skládání funkcí, grafy*.
6. Elementární funkce: *Mocninné, logaritmické, exponenciální, goniometrické a cyklometrické*.
7. Limita a spojitost funkce.
8. Základy diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné: *Derivace a její geometrický a fyzikální význam, diferenciál, užití při vyšetřování průběhu funkce*.

Letní semestr — KMA–MAT2

1. Základy integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné:
   - Neurčitý integrál,
   - určitý Riemannův integrál,
   - užití RI při určování
     - délky křivky,
     - obsahu plochy,
     - povrchu a objemu rotačního tělesa.
2. Funkce dvou proměnných:
   - Parciální derivace, diferenciál.
3. Úvod do diferenciálních rovnic:
   - Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.
4. Aplikace diferenciálního a integrálního počtu v chemii.
5. Základy numerické matematiky:
   - Numerické řešení rovnic o jedné neznámé.
   - Iterační metoda, interpolace, diference,
   - numerická derivace a integrace.

Studijní materiály

- STRÁNKY PŘEDMĚTU: `http://aix-slx.upol.cz/~fiser`.
- www.studopory.vsb.cz.
- V. MÁDROVÁ: Matematická analýza I. VUP, Olomouc, 2004.
- J. BRABEC, F. MARTAN, Z. ROZENSKÝ: Matematická analýza I. SNTL, Praha, 1989.
- J. KŘENEK, J. OSTRAVSKÝ: Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné Zlín, 2001.
- J. KOPÁČEK: Matematická analýza pro fyziky I., SPN, Praha (skripta MFF UK).

Studijní materiály

- V. MÁDROVÁ, J. MAREK Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I. VUP Olomouc, 2004.
- J. KOJECKÁ, M. ZÁVODNÝ: Příklady z matematické analýzy I., II., VUP Olomouc.
- B. P. DĚMIDOVIČ: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Praha, 2003.

Rozšiřující literatura:

- K. REKTORYS a kol.: Přehled užité matematiky SNTL, Praha, 1988.
- H. J. BARTSCH: Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1983.

1. Číselné obory. Úprava algebraických výrazů.

Základní číselné množiny

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech *celých* čísel.
- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\left\{\frac{k}{n},\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\right\}$ je množinou všech čísel *racionálních*.

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ *převeďte na obyčejný zlomek.*

První způsob řešení

Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \cdots = 1,5 + \frac{72}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \cdots = \frac{173}{110}.$$

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ *převeďte na obyčejný zlomek.*

Druhý způsob řešení

Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned} a &= 1,5\overline{72}, \\ 100a &= 157,2\overline{72}, \end{aligned}$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

tedy

$$a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}.$$

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$

- Základní číselná množina.
- Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu je bijekce,
  tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Potřebujeme iracionální čísla?

Věta

Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Důkaz (sporem)

- $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2.$
- $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$ — zlomek v základním tvaru, $rq = p$.
- $rq = p \rightarrow r^2q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé $\Rightarrow$ p je sudé
- p je sudé $\Rightarrow$ $p = 2k$ $\Rightarrow$ $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ q^2 je sudé $\Rightarrow$ q je sudé
- p a q je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru.

Iracionální čísla $\mathbb{Q}'$

- Bez iracionálních čísel bychom např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce.
- Platí:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$

- Dekadický rozvoj iracionálních čísel: neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)).

Mohutnost množin

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti),
- $\mathbb{R}$ (a tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má *mohutnost kontinua*.

Komplexní čísla $\mathbb{C}$

- Komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.
- Zapisujeme buď v algebraickém tvaru: $z = a + ib$,
  nebo v goniometrickém tvaru: $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Pro číselné množiny platí:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Vlastnosti číselných množin

Definice

Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \leq L$*. Toto číslo L se nazývá* **horní odhad** *(resp. horní závora).*
Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in R$*tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \geq K$*. Toto číslo K se nazývá* **dolní odhad** *(resp. dolní závora).*
Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ *je omezená shora i zdola.*

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Vlastnosti číselných množin

Definice

Množina M *se nazývá* **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \leq L$. *Toto číslo* L *se nazývá* **horní odhad** *(resp. horní závora).*
Množina M *se nazývá* **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in R$*tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \geq K$. *Toto číslo* K *se nazývá* **dolní odhad** *(resp. dolní závora).*
Množina M *se nazývá* **omezená** $\Leftrightarrow$ *je omezená shora i zdola.*

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\right\},$$

$$M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\},$$

$$M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Intervaly

Definice

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b)$ a $(a, b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice

Množinu $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ nazýváme **neomezený interval**.
Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$.
Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota *čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:*

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$, *přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost)*,
4. $|a-b| \geq |a| - |b|$,
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
6. *pro* $b \neq 0$ *je* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota *čísla* $a \in \mathbb{R}$ *se označuje* $|a|$ *a je definována takto:*

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$, *přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost)*,
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$,
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
6. *pro* $b \neq 0$ *je* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Zobecněná trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):
(3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, nebo zkráceně

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a-b|$ $(=|b-a|)$ vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x-3|<2$,

b) $2|x+2|-3|x|-2x\geq 4$,

c) $-3-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}|x+1|-\frac{3}{4}|x-2|=0$.

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a-b|$ $(= |b-a|)$ vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x-3| < 2$,

b) $2|x+2| - 3|x| - 2x \geq 4$,

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x+1| - \frac{3}{4}|x-2| = 0$.

Supremum a infimum

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** *množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,

(2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** *množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

(2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\beta \in \mathbb{R}$ *nazýváme* **supremum** *množiny* M *a píšeme* $\beta = \sup M$, *právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,

(2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *nazýváme* **infimum** *množiny* M *a píšeme* $\alpha = \inf M$, *právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

(2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Úloha

Určete sup M *a* inf M *pro množinu* $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

Řešení

Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r.
Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M.

Supremum a infimum

Věta (o existenci suprema a infima)

1) *Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*
2) *Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.*

Okolí bodu

Definice (Topologická definice)

Okolím bodu *a nazveme každý otevřený interval* (c, d) *konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde* $a \in (c, d)$*); označení okolí bodu a:* $U(a)$.

Definice (Metrická definice)

ε**-okolím bodu** *a, kde* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *nazýváme interval* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; *označení:* $U(a, \varepsilon)$ *nebo též* $U(a)$.

Rozšířená reálná osa

- Číselnou osu rozšíříme o dvě nevlastní čísla: $+\infty$ a $-\infty$.
- Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Rozšířená reálná osa
Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*:
$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$
zvláště
$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$
$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Supremum* a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Supremum* a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) =$$
$$= (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) =$$
$$= (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

  Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \text{ atd.,} \quad \frac{x}{0} \text{ pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\pm\infty}{0}.$$

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ *jen* ∞, *takže např. místo výrazu* $(+\infty)+(+\infty)$ *lze napsat jen* $\infty+\infty$. *Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované* ∞, *musíme dát pozor na jeho odlišení od* $+\infty$ *z rozšířené reálné osy* $\mathbb{R}^*$.

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞, takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞, musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$.

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Algebraické funkce

- je název pro elementární funkce, které vzniknou
  - z funkcí konstantních a
  - z funkce $f(x) = x$
- užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování.
- Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické **funkce racionální**.
- Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme **iracionální**.

Zvláštní případy algebraických funkcí:

- **celá racionální funkce** neboli funkce **polynomická** (algebraický polynom) a
- **lomená racionální funkce**, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Algebraické funkce

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem
b) Odmocniny
c) Mocniny s racionálním exponentem
d) Polynomické funkce
e) Racionální lomené funkce

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}}, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{N}:$

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$),

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(4) $(ab)^r = a^r b^r$,

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),

(6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

(7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,

(8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s; \quad \forall a \in (0, 1), r < s \Rightarrow a^r > a^s$.

Rozšíření pojmu mocnina

Nejprve exponent 0:

- Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1)–(5), je třeba podle

  (2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$)

  definovat
  $$\forall a \neq 0; a^0 = 1.$$
- Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem,
  neboť 0^0 není definována.
- Vlastnosti

  (6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$) a
  (7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$

  ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Rozšíření pojmu mocnina

Exponent — celé číslo.

- Klíčovou vlastností je opět

  (2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$),

  podle níž se definuje (položíme-li $r = 0$, $s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

- Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost

  (7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$

  nabude tvaru

(7') $$\begin{aligned} \forall r > 0, \forall a, b > 0 : \quad & a^r < b^r \ \Leftrightarrow \ a < b, \\ \forall r < 0, \forall a, b > 0 : \quad & a^r > b^r \ \Leftrightarrow \ a < b. \end{aligned}$$

b) Odmocniny

Definice

Pro každé přirozené číslo n definujeme n-tou odmocninu z nezáporného čísla a *jako takové nezáporné číslo* x, *pro něž platí* $x^n = a$.

Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, například $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Existence n-té odmocniny

- se zdá být zřejmá.
- Jednoduché příklady: $\sqrt[3]{8} = 2,$ neboť $2^3 = 8.$
- Méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi},$ je třeba si odpovědět na otázku,
- zda n-tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta (o existenci a jednoznačnosti n-té odmocniny)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.

Základní vlastnosti odmocnin:

Věta

$\forall a \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ \forall m, n, r \in \mathbb{N}$:

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$,
2) $\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}$.

c) Mocniny s racionálním exponentem

- Vyjdeme ze základní vlastnosti n-té odmocniny z čísla a:

$$x^n = a.$$

- Tedy položíme $x = a^t$
  a po umocnění na n-tou je $a = x^n = a^{tn}$,
  tedy $tn = 1,\ t = 1/n$.
- To vede k definici $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R},\ a > 0)$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

- Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s.

Mocniny s reálným exponentem

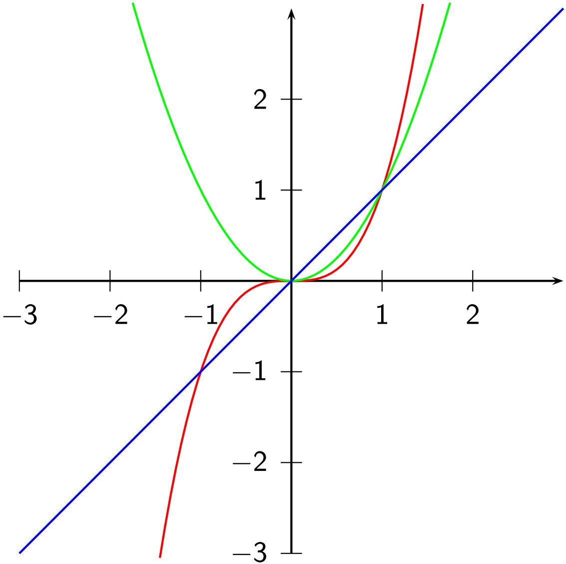
- Pojem mocniny lze takto rozšířit, ale
- mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice

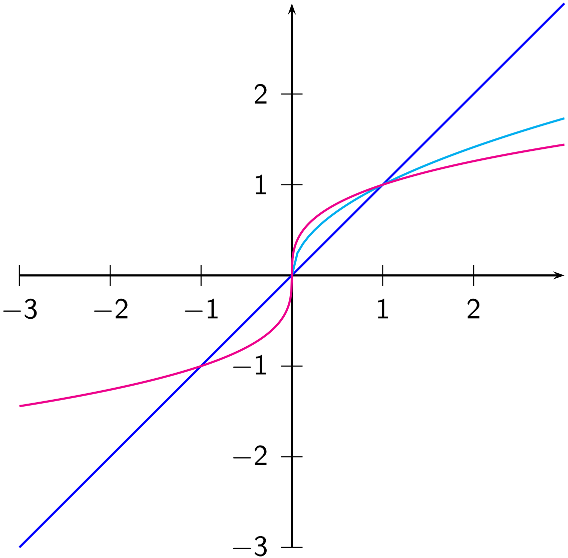
Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{Q}'$. *Pak definujeme*

$$a^q = \sup_{r \in Q,\, r<q} \{a^r\}.$$

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1)–(6), (7'), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.



Obrázek: Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$ a $y = x$.



Obrázek: Grafy funkcí $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.

d) Polynomické funkce

- Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

  je algebraický polynom.
- Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n-tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$.
- Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá,
- pokud obsahuje jen sudé mocniny x, je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá.

Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P, Q nejvýše n-tého stupně se rovnají v $n+1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\mathbb{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

e) Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $\frac{P(x)}{Q(x)}$.Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Racionální lomené funkce

Úloha

Je dána funkce $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. *Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.*

Řešení.

Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 2 + \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3}$. □

Racionální lomené funkce

Úloha

Je dána funkce $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$*. Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete klasické dělení.*

Řešení.

V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$. $\square$

Úprava algebraických výrazů [www.studopory.vsb.cz]

Úloha (Úprava racionálních výrazů)

Zjednodušte algebraický výraz

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}$$

a uveďte podmínky řešitelnosti.

Úprava algebraických výrazů [www.studopory.vsb.cz]

Úloha (Úprava racionálních výrazů)

Zjednodušte algebraický výraz

$$\frac{a^2+a-2}{a^4-3a^3}\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]$$

a uveďte podmínky řešitelnosti.

Úprava algebraických výrazů [www.studopory.vsb.cz]

Úloha (Úprava iracionálních výrazů)

Upravte výraz

$$V(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}}$$

převodem odmocnin na mocniny s racionálními exponenty.

Úprava algebraických výrazů [www.studopory.vsb.cz]

Úloha (Rozklad polynomu)

Upravte výraz

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} : \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 49}$$

.

Úprava algebraických výrazů [www.studopory.vsb.cz]

Úloha (Rozklad polynomu)

Upravte výraz

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$$

.