Kombinatorika a úvod do pravděpodobnosti

Jiří Fišer

27. září 2011

Kombinatorika

- VARIACE k-té třídy z n prvků:
  - = uspořádané skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.
- PERMUTACE n prvků:
  - = uspořádané n-tice vybrané z n prvků.
- KOMBINACE k-té třídy z n prvků:
  - = (neuspořádané) skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

Počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Úloha

Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Z prvků této množiny máme vytvářet dvojice, přičemž záleží na pořadí a prvky se nemohou opakovat.

Úloha

Na startu běžeckého závodu je osm atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

Počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Úloha

Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Z prvků této množiny máme vytvářet dvojice, přičemž záleží na pořadí a prvky se nemohou opakovat.

Úloha

Na startu běžeckého závodu je osm atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{V_k^*(n) = n^k.}$$

Úloha

Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4 a 5?

Úloha

Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{V_k^*(n) = n^k.}$$

Úloha

Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4 a 5?

Úloha

Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

Počet permutací n prvků bez opakování

$$\boxed{P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.}$$

Úloha

Najděte všechny permutace bez opakování z prvků množiny $M = \{1, 7, 9\}$.

Počet permutací n prvků s opakováním

$$\boxed{P^*(n) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}}$$

Úloha

Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?

Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

Úloha

Jaký je vztah mezi počty variací a kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování?

Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!}.}$$

Úloha

Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2;15 \rangle$.

Kombinatorika: souhrnný příklad

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\boxed{P(n) = n!}$$

$$\boxed{C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Úloha

Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4 a 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:

a) *pětimístná, sudá;*

b) *pětimístná, končící dvojčíslím 21;*

c) *pětimístná, menší než 30 000;*

d) *trojmístná lichá;*

e) *čtyřmístná, větší než 2 000;*

f) *dvojmístná nebo trojmístná.*

Past

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu}}{\text{počet všech možných výsledků}} \Longrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

- $P(A) = 0$ — nemožný jev;
- $P(A) = 1$ — jistý jev;
- $P(A') = 1 - P(A)$ — past opačného jevu;

Pravděpodobnost

Úloha

Vypočtěte pravděpodobnost uhádnutí všech šesti čísel při tažení šesti čísel ze čtyřiceti devíti.

Řešení.

$$P(A) = \frac{1}{C_6(49)} = \frac{1}{\frac{49!}{6!43!}} = \frac{1}{13\,983\,816} \doteq 7{,}1 \cdot 10^{-8} = 0{,}000\,000\,071.$$

$\square$

Pravděpodobnost

Úloha

Vypočtěte pravděpodobnost uhádnutí právě tří čísel při tažení šesti čísel ze čtyřiceti devíti.

Řešení.

Tipujeme 6 čísel. Počítáme pravděpodobnost vylosování právě 3 čísel z těchto 6. Existuje $C_3(6)$ možných trojic našich čísel. Ke každé z těchto trojic je $C_3(43)$ možností, jak doplnit naši vylosovanou trojici trojicí čísel mimo náš tip $(49 - 6 = 43)$.

Celkový počet možností, kdy ve vylosované šestici jsou právě tři čísla z našeho tipu je tedy rovna součinu těchto hodnot. Výsledná pravděpodobnost:

$$P(A) = \frac{\begin{array}{c}\text{počet trojic}\\ \text{z tipu}\end{array} \times \begin{array}{c}\text{počet trojic}\\ \text{mimo tip}\end{array}}{\text{celkový počet šestic}} = \frac{C_3(6) \cdot C_3(43)}{\frac{49!}{6!43!}} \doteq 0{,}017\,65.$$

Pravděpodobnost

Úloha

40 studentů má být náhodně rozděleno do 4 stejně početných skupin. Mezi studenty jsou i Adam a Eva. Jaká je past, že budou zařazeni do téže skupiny?

Řešení.

- Studenty náhodně očíslujeme čísly 1–40. Studenti 1–10 tvoří první skupinu, atd.
- Takto Adam a Eva též dostanou svá čísla, resp. uspořádanou dvojici čísel, celkově pro ně $V_2(40)$ možností.
- Kolik z nich je příznivých? Pro každou skupinu je to $V_2(10)$ možností. Skupiny jsou čtyři.

$$P(A) = \frac{4 \cdot V_2(10)}{V_2(40)} = \frac{9}{39} \doteq 0{,}23.$$

□

Sčítání pastí a podmíněná past

- $A \cup B$ — nastává alespoň jeden z jevů A a B;
- $A \cap B$ — nastávají oba jevy A a B;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- Nezávislé jevy:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$
- Podmíněná past:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};$$
- Podmíněná pro nezávislé:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Úloha

Hod dvěma kostkami, bílou a černou:

- *Jev A: na bílé kostce padne číslo ≥ 3;*
- *Jev B: na černé kostce padne číslo ≤ 3.*

$P(A) = ?$, $P(B) = ?$, $P(A \cap B) = ?$, $P(A \cup B) = ?$, $P(A/B) = ?$ *a* $P(B/A) = ?$.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Hodnota} \\ \text{na bílé} \\ \text{kostce} \end{array} , \begin{array}{c} \text{Hodnota} \\ \text{na černé} \\ \text{kostce} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
\hline
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

- $P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$
- $P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3},$
- $P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = P(A) \quad P(B/A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = P(B).$

Úloha

Jaká je past, že ve skupině n lidí jsou alespoň dva, kteří mají narozeniny ve stejný den v roce?

Řešení.

- jev A_n: ...
- opačný jev A'_n: „žádní dva lidé nemají společné narozeniny“.

$$P(A_n) = 1 - P(A'_n) = 1 - \frac{V_n(365)}{V^*_n(365)} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}.$$

Vyčíslíme pro $n = 2, 3, 30, 33, 35$:

$$P(A_2) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-2)!}}{365^2} = \frac{1}{365} \doteq 0{,}002\,739\,726.$$

1	2	5	10	15	20	25	30	40	50
0	0,002 7	0,027	0,12	0,25	0,41	0,57	0,71	0,89	0,.97