

Matematika 1

Jiří Fišer

24. září 2013

- 1 Úprava algebraických výrazů. Číselné obory.
- 2 Kombinatorika, základy teorie pravděpodobnosti a statistiky.
- 3 Základy lineární algebry: Vektory, matice, determinanty a řešení soustav lineárních rovnic (věta Frobeniova a Cramerova).
- 4 Posloupnosti a jejich limity, řady.
- 5 Funkce: Inverzní funkce, skládání funkcí, grafy.
- 6 Elementární funkce: Mocninné, logaritmické, exponenciální, goniometrické a cyklometrické.
- 7 Limita a spojitost funkce.
- 8 Základy diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné: Derivace a její geometrický a fyzikální význam, diferenciál, užití při vyšetřování průběhu funkce.

- 1 Základy integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné:
 - ▶ Neurčitý integrál,
 - ▶ určitý Riemannův integrál,
 - ▶ užití RI při určování
 - ★ délky křivky,
 - ★ obsahu plochy,
 - ★ povrchu a objemu rotačního tělesa.
- 2 Funkce dvou proměnných:
 - ▶ Parciální derivace, diferenciál.
- 3 Úvod do diferenciálních rovnic:
 - ▶ Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.
- 4 Aplikace diferenciálního a integrálního počtu v chemii.
- 5 Základy numerické matematiky:
 - ▶ Numerické řešení rovnic o jedné neznámé.
 - ▶ Iterační metoda, interpolace, difference,
 - ▶ numerická derivace a integrace.

Studijní materiály

<http://aix-slx.upol.cz/~fiser>

- STRÁNKY PŘEDMĚTU:
- www.studopory.vsb.cz.
- V. MÁDROVÁ: Matematická analýza I. VUP, Olomouc, 2004.
- J. BRABEC, F. MARTAN, Z. ROZENSKÝ: Matematická analýza I. SNTL, Praha, 1989.
- J. KŘENEK, J. OSTRAVSKÝ: Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné Zlín, 2001.
- J. KOPÁČEK: Matematická analýza pro fyziky I., SPN, Praha (skripta MFF UK).

Studijní materiály

- V. MÁDROVÁ, J. MAREK Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I. VUP Olomouc, 2004.
- J. KOJECKÁ, M. ZÁVODNÝ: Příklady z matematické analýzy I., II., VUP Olomouc.
- B. P. DĚMIDOVIČ: Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Praha, 2003.

Rozšiřující literatura:

- K. REKTORYS a kol.: Přehled užití matematiky SNTL, Praha, 1988.
- H. J. BARTSCH: Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1983.

1. Číselné obory. Úprava algebraických výrazů.

1.1. Základní číselné množiny

1.2. Vlastnosti číselných množin

1.3. Supremum a infimum

1.4. Rozšířená reálná osa

Základní číselné množiny

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je množina všech *celých* čísel.
- \mathbb{Q} — množina všech zlomků $\{\frac{k}{n}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\}$ je množinou všech čísel *racionálních*.

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ převed'te na obyčejný zlomek.

První způsob řešení

Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \dots = 1,5 + \frac{72}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \dots = \frac{173}{110}.$$

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ převed'te na obyčejný zlomek.

Druhý způsob řešení

Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned}a &= 1,5\overline{72}, \\ 100a &= 157,2\overline{72},\end{aligned}$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

tedy

$$a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}.$$

Množina reálných čísel \mathbb{R}

- Základní číselná množina.
- Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z \mathbb{Q} na \mathbb{R} vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny \mathbb{R} na číselnou osu je bijekce, tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Potřebujeme iracionální čísla?

Věta

Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Důkaz (sporem)

- $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2.$
- $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$ — zlomek v základním tvaru, $rq = p.$
- $rq = p \rightarrow r^2 q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé \Rightarrow **p je sudé**
- p je sudé $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow q^2$ je sudé \Rightarrow **q je sudé**
- p a q je sudé \Rightarrow zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je **spor** s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru.

Iracionální čísla \mathbb{Q}'

- Bez iracionálních čísel bychom např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce.

- Platí:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$

- Dekadický rozvoj iracionálních čísel: neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)).

Mohutnost množin

- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , a \mathbb{Q} jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti),
- \mathbb{R} (a tedy i \mathbb{Q}') spočetná není; říkáme, že \mathbb{R} má *mohutnost kontinua*.

Komplexní čísla \mathbb{C}

- Komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.
- Zapisujeme buď v algebraickém tvaru: $z = a + ib$,
nebo v goniometrickém tvaru: $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Pro číselné množiny platí:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Vlastnosti číselných množin

Definice

*Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá **horní odhad** (resp. horní závora).*

*Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá **dolní odhad** (resp. dolní závora).*

*Množina M se nazývá **omezená** \Leftrightarrow je omezená shora i zdola.*

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M , pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej **max M** . Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme **min M** .

Vlastnosti číselných množin

Definice

Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá **horní odhad** (resp. horní závora).

Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá **dolní odhad** (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá **omezená** \Leftrightarrow je omezená shora i zdola.

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M , pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej **max M** . Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme **min M** .

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\},$$

$$M_3 = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\},$$

$$M_3 = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Intervaly

Definice

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b \rangle$ a (a, b) .

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice

Množinu $\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ nazýváme **neomezený interval**.

Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b)$.

Množinu \mathbb{R} zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí

- 1 $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- 2 $|-a| = |a|$,
- 3 $|a + b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníkovou nerovnost),
- 4 $|a - b| \geq |a| - |b|$,
- 5 $|ab| = |a| \cdot |b|$,
- 6 pro $b \neq 0$ je $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí

- 1 $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- 2 $|-a| = |a|$,
- 3 $|a + b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníkovou nerovnost),
- 4 $|a - b| \geq |a| - |b|$,
- 5 $|ab| = |a| \cdot |b|$,
- 6 pro $b \neq 0$ je $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Zobecněná trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):

(3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, nebo zkráceně

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a - b|$ ($= |b - a|$) vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x - 3| < 2,$

b) $2|x + 2| - 3|x| - 2x \geq 4,$

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x + 1| - \frac{3}{4}|x - 2| = 0.$

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a - b|$ ($= |b - a|$) vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x - 3| < 2,$

b) $2|x + 2| - 3|x| - 2x \geq 4,$

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x + 1| - \frac{3}{4}|x - 2| = 0.$

Supremum a infimum

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,
- (2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,
- (2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,
- (2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,
- (2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Úloha

Určete $\sup M$ a $\inf M$ pro množinu $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

Řešení

Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r .

Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M .

Supremum a infimum

Věta (o existenci suprema a infima)

- 1) *Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*
- 2) *Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.*

Okolí bodu

Definice (Topologická definice)

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.

Definice (Metrická definice)

ε -okolím bodu a , kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Rozšířená reálná osa

- Číselnou osu rozšíříme o dvě **nevlastní čísla**: $+\infty$ a $-\infty$.
- Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na \mathbb{R} .

- *Uspořádání:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Supremum a infimum:* Pro množinu M , která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M , která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na \mathbb{R} .

- *Uspořádání:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Supremum a infimum:* Pro množinu M , která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M , která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\begin{aligned}\pm x + (+\infty) &= (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = \\ &= (+\infty) - (-\infty) = +\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm x + (-\infty) &= (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = \\ &= (-\infty) - (+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

Rozšířená reálná osa

Počtení operace s nevlastními čísly

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \text{ atd.}, \quad \frac{x}{0} \text{ pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\pm\infty}{0}.$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞ , takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞ , musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy \mathbb{R}^ .*

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞ , takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞ , musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy \mathbb{R}^ .*

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Algebraické funkce

- je název pro elementární funkce, které vzniknou
 - ▶ z funkcí konstantních a
 - ▶ z funkce $f(x) = x$
- užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování.
- Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické **funkce racionální**.
- Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme **iracionální**.

Zvláštní případy algebraických funkcí:

- **celá racionální funkce** neboli funkce **polynomická** (algebraický polynom) a
- **lomená racionální funkce**, patří mezi nejvýznamnější funkce

Algebraické funkce

- a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem
- b) Odmocniny
- c) Mocniny s racionálním exponentem
- d) Polynomické funkce
- e) Racionální lomené funkce

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}}, \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{N}$:

- (1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
- (2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0, r > s$),
- (3) $(a^r)^s = a^{rs}$,
- (4) $(ab)^r = a^r b^r$,
- (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),
- (6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

- (7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,
- (8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s; \quad \forall a \in (0, 1), r < s \Rightarrow a^r > a^s$.

Rozšíření pojmu mocnina

Nejprve exponent 0:

- Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1)–(5), je třeba podle

$$(2) a^r : a^s = a^{r-s} \text{ (pokud } a \neq 0, r > s)$$

definovat

$$\forall a \neq 0; a^0 = 1.$$

- Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována.

- Vlastnosti

$$(6) a^r = b^r \Leftrightarrow a = b \text{ (pokud } a, b > 0) \text{ a}$$

$$(7) \forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$$

ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Rozšíření pojmu mocnina

Exponent — celé číslo.

- Klíčovou vlastností je opět

$$(2) a^r : a^s = a^{r-s} \text{ (pokud } a \neq 0, r > s),$$

podle níž se definuje (položíme-li $r = 0, s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

- Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost

$$(7) \forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$$

nabude tvaru

$$(7') \forall r > 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r < b^r \Leftrightarrow a < b,$$

$$\forall r < 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r > b^r \Leftrightarrow a < b.$$

b) Odmocniny

Definice

Pro každé přirozené číslo n definujeme n -tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x , pro něž platí $x^n = a$.

Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, například $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Existence n -té odmocniny

- se zdá být zřejmá.
- Jednoduché příklady: $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$.
- Méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku,
- zda n -tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta (o existenci a jednoznačnosti n -té odmocniny)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.

Základní vlastnosti odmocnin:

Věta

$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, \forall m, n, r \in \mathbb{N}$:

$$1) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$2) \sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}.$$

c) Mocniny s racionálním exponentem

- Vyjdeme ze základní vlastnosti n -té odmocniny z čísla a :

$$x^n = a.$$

- Tedy položíme $x = a^t$
a po umocnění na n -tou je $a = x^n = a^{tn}$,
tedy $tn = 1$, $t = 1/n$.

- To vede k definici $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0)$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

- Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s .

Mocniny s reálným exponentem

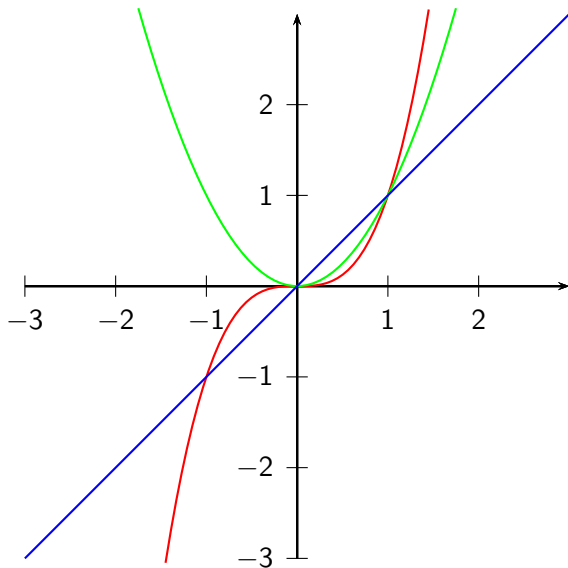
- Pojem mocniny lze takto rozšířit, ale
- mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice

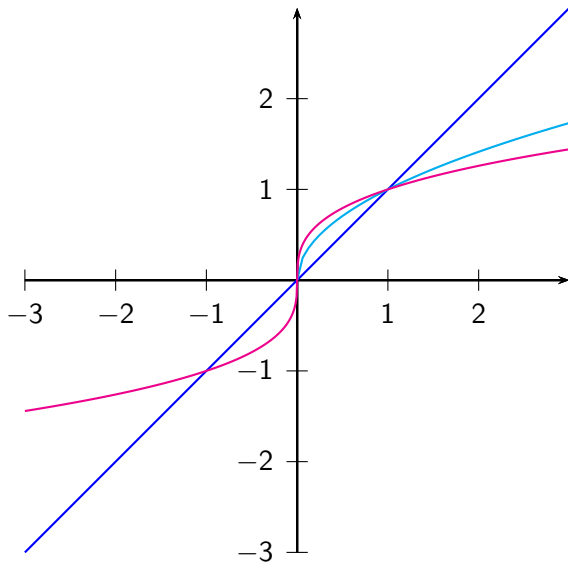
Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{Q}'$. Pak definujeme

$$a^q = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r < q} \{a^r\}.$$

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1)–(6), (7'), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.



Obrázek : Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$ a $y = x$.



Obrázek : Grafy funkcí $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.

d) Polynomické funkce

- Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

je algebraický polynom.

- Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n -tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$.
- Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá,
- pokud obsahuje jen sudé mocniny x , je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá.

Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P , Q nejvýše n -tého stupně se rovnají v $n + 1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na \mathbb{R} , tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

e) Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Racionální lomené funkce

Úloha

Je dána funkce $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.

Řešení.

Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 2 + \frac{3x - 1}{x^2 + 3}$. □

Racionální lomené funkce

Úloha

Je dána funkce $y = \frac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$. Proved'te snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete klasické dělení.

Řešení.

V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$. □

Úloha (Úprava racionálních výrazů)

Zjednodušte algebraický výraz

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2$$

a uveďte podmínky řešitelnosti.

Úloha (Úprava racionálních výrazů)

Zjednodušte algebraický výraz

$$\frac{a^2 + a - 2}{a^4 - 3a^3} \left[\frac{(a + 2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{3}{a^2 - a} \right]$$

a uveďte podmínky řešitelnosti.

Úloha (Úprava iracionálních výrazů)

Upravte výraz

$$V(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2} \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}}$$

převodem odmocnin na mocniny s racionálními exponenty.

Úloha (Rozklad polynomu)

Upravte výraz

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} : \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 49}$$

.

Úloha (Rozklad polynomu)

Upravte výraz

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$$

.