Matematika 1

Jiří Fišer

19. září 2016

Zimní semestr — KMA–MAT1

1. Úprava algebraických výrazů. Číselné obory.
2. Kombinatorika, základy teorie pravděpodobnosti a statistiky.
3. Základy lineární algebry: *Vektory, matice, determinanty a řešení soustav lineárních rovnic (věta Frobeniova a Cramerova).*
4. Posloupnosti a jejich limity, řady.
5. Funkce: *Inverzní funkce, skládání funkcí, grafy.*
6. Elementární funkce: *Mocninné, logaritmické, exponenciální, goniometrické a cyklometrické.*
7. Limita a spojitost funkce.
8. Základy diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné: *Derivace a její geometrický a fyzikální význam, diferenciál, užití při vyšetřování průběhu funkce.*

Letní semestr — KMA–MAT2

1. Základy integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné:
   - Neurčitý integrál,
   - určitý Riemannův integrál,
   - užití RI při určování
     - délky křivky,
     - obsahu plochy,
     - povrchu a objemu rotačního tělesa.
2. Funkce dvou proměnných:
   - Parciální derivace, diferenciál.
3. Úvod do diferenciálních rovnic:
   - Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.
4. Aplikace diferenciálního a integrálního počtu v chemii.
5. Základy numerické matematiky:
   - Numerické řešení rovnic o jedné neznámé.
   - Iterační metoda, interpolace, diference,
   - numerická derivace a integrace.

Studijní materiály

- Stránky předmětu: http://aix-slx.upol.cz/~fiser.
- www.studopory.vsb.cz.
- V. MÁDROVÁ: Matematická analýza I. VUP, Olomouc, 2004.
- J. BRABEC, F. MARTAN, Z. ROZENSKÝ: Matematická analýza I. SNTL, Praha, 1989.
- J. KŘENEK, J. OSTRAVSKÝ: Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné Zlín, 2001.
- J. KOPÁČEK: Matematická analýza pro fyziky I., SPN, Praha (skripta MFF UK).

Studijní materiály

- V. MÁDROVÁ, J. MAREK Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I. VUP Olomouc, 2004.
- J. KOJECKÁ, M. ZÁVODNÝ: Příklady z matematické analýzy I., II., VUP Olomouc.
- B. P. DĚMIDOVIČ: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Praha, 2003.

Rozšiřující literatura:

- K. REKTORYS a kol.: Přehled užité matematiky SNTL, Praha, 1988.
- H. J. BARTSCH: Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1983.

1. Číselné obory. Úprava algebraických výrazů.

Základní číselné množiny

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je množina všech *celých* čísel.
- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\left\{\frac{k}{n},\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\right\}$ je množinou všech čísel *racionálních*.

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ *převeďte na obyčejný zlomek.*

První způsob řešení

Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \cdots = 1,5 + \frac{72}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \cdots = \frac{173}{110}.$$

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ *převeďte na obyčejný zlomek.*

Druhý způsob řešení

Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned} a &= 1,5\overline{72}, \\ 100a &= 157,2\overline{72}, \end{aligned}$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

tedy

$$a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}.$$

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$

- Základní číselná množina.
- Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu je bijekce,
  tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Potřebujeme iracionální čísla?

Věta

Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Důkaz (sporem)

- $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$.
- $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$ — zlomek v základním tvaru, $rq = p$.
- $rq = p \to r^2q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé $\Rightarrow$ p je sudé
- p je sudé $\Rightarrow$ $p = 2k$ $\Rightarrow$ $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ q^2 je sudé $\Rightarrow$ q je sudé
- p a q je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru.

Iracionální čísla $\mathbb{Q}'$

- Bez iracionálních čísel bychom např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce.
- Platí:
$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$
- Dekadický rozvoj iracionálních čísel: neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)).

Mohutnost množin

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti),
- $\mathbb{R}$ (a tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má *mohutnost kontinua*.

Komplexní čísla $\mathbb{C}$

- Komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.
- Zapisujeme buď v algebraickém tvaru: $z = a + ib$,
  nebo v goniometrickém tvaru: $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Pro číselné množiny platí:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Vlastnosti číselných množin

Definice

Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \leq L$. *Toto číslo L se nazývá* **horní odhad** *(resp. horní závora).*
Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in R$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \geq K$. *Toto číslo K se nazývá* **dolní odhad** *(resp. dolní závora).*
Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ *je omezená shora i zdola.*

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Vlastnosti číselných množin

Definice

Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \leq L$. *Toto číslo L se nazývá* **horní odhad** *(resp. horní závora).*
Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in R$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \geq K$. *Toto číslo K se nazývá* **dolní odhad** *(resp. dolní závora).*
Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ *je omezená shora i zdola.*

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\right\},$$

$$M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\right\},$$

$$M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Intervaly

Definice

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *definujeme*

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b)$ *a* $(a, b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice

Množinu $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ *nazýváme* **neomezený interval**.
Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$.
Množinu $\mathbb{R}$ *zapisujeme též jako* $(-\infty, +\infty)$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota *čísla* $a \in \mathbb{R}$ *se označuje* $|a|$ *a je definována takto:*

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$, *přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost)*,
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$,
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
6. *pro* $b \neq 0$ *je* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota *čísla* $a \in \mathbb{R}$ *se označuje* $|a|$ *a je definována takto:*

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$, *přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost)*,
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$,
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
6. *pro* $b \neq 0$ *je* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Zobecněná trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):
(3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, nebo zkráceně

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a-b|$ $(=|b-a|)$ vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x-3|<2$,

b) $2|x+2|-3|x|-2x \geq 4$,

c) $-3-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}|x+1|-\frac{3}{4}|x-2|=0$.

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a-b|$ $(=|b-a|)$ vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x-3|<2$,

b) $2|x+2|-3|x|-2x \geq 4$,

c) $-3-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}|x+1|-\frac{3}{4}|x-2|=0$.