KMA/MAT1 Matematika 1 — Přednáška č. 2

Jiří Fišer

26. září 2016

Součin, podíl a mocniny komplexních čísel v goniometrickém tvaru

- Dvě nenulová komplexní čísla:

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\alpha_1 + \mathrm{i}\sin\alpha_1), \quad z_2 = |z_2|\,(\cos\alpha_2 + \mathrm{i}\sin\alpha_2)$$

- Jejich součin

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\,\big(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{i}\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\big)$$

- Jejich podíl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \mathrm{i}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\big)$$

- n-tá mocnina:

$$(z_1)^n = |z_1|^n\,\big(\cos(n\cdot\alpha_1) + \mathrm{i}\sin(n\cdot\alpha_1)\big)$$

Součin, podíl a mocniny komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Příklad (EG,Př. 4.5.3)

Vypočteme součin a podíl komplexních čísel

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad a \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Podle vzorců:

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Maximum (největší prvek) a minimum (nejmenší prvek) množiny

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\beta \in M$ *nazýváme* **maximum** *množiny* M *a píšeme* $\beta = \max M$, *právě když platí:*

- $\forall x \in M : x \leq \beta$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\alpha \in M$ *nazýváme* **minimum** *množiny* M *a píšeme* $\alpha = \min M$, *právě když platí:*

- $\forall x \in M : x \geq \beta$.

Supremum a infimum množiny

- Zobecnění pojmů maxima a minima množiny.
- Pokud existuje $\max M$, potom $\sup M = \max M$.
- Pokud existuje $\min M$, potom $\inf M = \min M$.

Příklad

Například množina

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

má maximum $\max M = 1$, *ale nemá minimum. Máme tedy* $\sup M = \max M = 1$ *a navíc můžeme definovat* $\inf M = 0$.

Supremum a infimum množiny

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\beta \in \mathbb{R}$ *nazýváme* **supremum** *množiny* M *a píšeme* $\beta = \sup M$, *právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,

(2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *nazýváme* **infimum** *množiny* M *a píšeme* $\alpha = \inf M$, *právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

(2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum množiny

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\beta \in \mathbb{R}$ *nazýváme* **supremum** *množiny* M *a píšeme* $\beta = \sup M$, *právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,

(2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. *Číslo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *nazýváme* **infimum** *množiny* M *a píšeme* $\alpha = \inf M$, *právě když má tyto dvě vlastnosti:*

(1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

(2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Úloha

Určete $\sup M$ *a* $\inf M$ *pro množinu* $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

Řešení

Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r.
Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M.

Supremum a infimum

Věta (o existenci suprema a infima)

1) *Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*
2) *Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.*

Okolí bodu

Definice (Topologická definice)

Okolím bodu *a nazveme každý otevřený interval* (c, d) *konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde* $a \in (c, d)$*); označení okolí bodu a:* $U(a)$.

Definice (Metrická definice)

ε-**okolím bodu** a, *kde* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *nazýváme interval* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; *označení:* $U(a, \varepsilon)$ *nebo též* $U(a)$.

Rozšířená reálná osa

- Číselnou osu rozšíříme o dvě nevlastní čísla: $+\infty$ a $-\infty$.
- Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Supremum* a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Supremum* a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) =$$

$$= (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) =$$

$$= (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

  Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \text{ atd.}, \quad \frac{x}{0} \text{ pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\pm\infty}{0}.$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Kombinatorika

	Bez opakování	S opakováním
Variace	$V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^*(n) = n^k$
Permutace	$P(n) = n!$	$P^*(n) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
Kombinace	$C_k(n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$

Kombinatorika

- VARIACE k-té třídy z n prvků:
  $=$ uspořádané skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.
- PERMUTACE n prvků:
  $=$ uspořádané n-tice vybrané z n prvků.
- KOMBINACE k-té třídy z n prvků:
  $=$ (neuspořádané) skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

Počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Úloha

Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Z prvků této množiny máme vytvářet dvojice, přičemž záleží na pořadí a prvky se nemohou opakovat.

Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{V_k^*(n) = n^k.}$$

Úloha

Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4 a 5?

Počet permutací n prvků bez opakování

$$\boxed{P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.}$$

Počet permutací n prvků s opakováním

$$P^*(n) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Úloha

Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?

Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování

$$\boxed{C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

Úloha

Jaký je vztah mezi počty variací a kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování?

Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním

$$\boxed{C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!}.}$$

Úloha

Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2;15 \rangle$.