KMA/MAT1 Cvičení č. 3,

7. října 2014

1 Kombinatorika

	Bez opakování	S opakováním
Variace	$V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^*(n) = n^k$
Permutace	$P(n) = n!$	$P^*(n) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
Kombinace	$C_k(n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^*(n) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

- VARIACE k-té třídy z n prvků:

  = uspořádané skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

- PERMUTACE n prvků:

  = uspořádané n-tice vybrané z n prvků.

- KOMBINACE k-té třídy z n prvků:

  = (neuspořádané) skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

Úloha 1. *Na startu běžeckého závodu je osm atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?*

Řešení. $V_3(8) = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336.$ □

Úloha 2. *Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?*

Řešení. Počet 1-znakových $(- \quad \cdot)$ + počet 2-znakových $(-- \quad -\cdot \quad \cdot- \quad \cdot\cdot) + \cdots +$ počet 5-znakových $(----- \quad \ldots \quad -\cdot\cdot\cdot\cdot \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$, tedy $V_1^*(2) + V_2^*(2) + V_3^*(2) + V_4^*(2) + V_5^*(2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62.$ □

Úloha 3. *Najděte všechny permutace bez opakování z prvků množiny* $M = \{1,7,9\}$.

Řešení. $\{1,7,9\}, \{1,9,7\}, \{7,1,9\}, \{7,9,1\}, \{9,1,7\}, \{9,7,1\}$.

$3! = 6$ permutací. □

Úloha 4 (Kombinatorika: souhrnný příklad)**.** *Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4 a 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:*

a) pětimístná, sudá;

b) pětimístná, končící dvojčíslím 21;

c) pětimístná, menší než 30 000;

d) trojmístná lichá;

e) čtyřmístná, větší než 2 000;

f) dvojmístná nebo trojmístná.

Řešení.

ad a) (pětimístná, sudá)

Dvě možnosti:

- Čísla tvaru XXXX2: na prvních čtyřech pozicích permutujeme všechny zbývající číslice 1,3,4,5. Těchto permutací je $P(4) = 4! = 24$.
- Čísla tvaru XXXX4: na prvních čtyřech pozicích permutujeme všechny zbývající číslice 1,2,3,5. Těchto permutací je také $P(4) = 4! = 24$.

Dohromady tedy máme $(24 + 24 =)48$ pětimístných sudých čísel.

ad b) (pětimístná, končící dvojčíslím 21)

XXX21, $3! = 6$.

ad c) (pětimístná, menší než 30 000)

1XXXX nebo 2XXXX, tedy $4! + 4! = 48$.

ad d) (trojmístná lichá)

XX1, XX3 nebo XX5, tedy $V_2(4) + V_2(4) + V_2(4) = 3 \cdot \dfrac{4!}{(4-2)!} = 3 \cdot 12 = 36$.

ad e) (čtyřmístná, větší než 2 000)

2XXX, 3XXX, 4XXX a 5XXX, tedy $V_3(4)+V_3(4)+V_3(4)+V_3(4) = 4 \cdot \dfrac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 24 = 96$.

ad f) (dvojmístná nebo trojmístná)

XX nebo XXX, tedy $V_2(5)+V_3(5) = \dfrac{5!}{(5-2)!} + \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!} + \dfrac{5!}{2!} = 20+60 = 80$.

□

2 Pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků}} \Longrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

- $P(A) = 0$ — nemožný jev;
- $P(A) = 1$ — jistý jev;
- $P(A') = 1 - P(A)$ — past opačného jevu;

Úloha 5. *Vypočtěte pravděpodobnost uhádnutí právě tří čísel při tažení šesti čísel ze čtyřiceti devíti.*

Řešení. Tipujeme 6 čísel. Počítáme pravděpodobnost vylosování právě 3 čísel z těchto 6. Existuje $C_3(6)$ možných trojic našich čísel. Ke každé z těchto trojic je $C_3(43)$ možností, jak doplnit naši vylosovanou trojici trojicí čísel mimo náš tip $(49 - 6 = 43)$.

Celkový počet možností, kdy ve vylosované šestici jsou právě tři čísla z našeho tipu je tedy roven součinu těchto hodnot. Výsledná pravděpodobnost:

$$P(A) = \frac{\begin{matrix}\text{počet trojic} \\ \text{z tipu}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{počet trojic} \\ \text{mimo tip}\end{matrix}}{\text{celkový počet šestic}} = \frac{C_3(6) \cdot C_3(43)}{\frac{49!}{6!43!}} \doteq 0{,}017\,65.$$

□

2.1 Sčítání pastí a podmíněná past

- $A \cup B$ — nastává alespoň jeden z jevů A a B;
- $A \cap B$ — nastávají oba jevy A a B;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- Nezávislé jevy:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$

Úloha 6. *Hod dvěma kostkami, bílou a černou:*

- *Jev A: na bílé kostce padne číslo* ≥ 3*;*
- *Jev B: na černé kostce padne číslo* ≤ 3.

$P(A) =?$, $P(B) =?$, $P(A \cap B) =?$ *a* $P(A \cup B) =?$.

$$\begin{pmatrix} \text{Hodnota} & & \text{Hodnota} \\ \text{na bílé} & , & \text{na černé} \\ \text{kostce} & & \text{kostce} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
\hline
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

- $P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$
- $P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3},$
- $P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = P(A) \quad P(B/A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = P(B).$

Úloha 7. *Jaká je past, že ve skupině n lidí jsou alespoň dva, kteří mají narozeniny ve stejný den v roce?*

Řešení.
- jev A_n: ...
- opačný jev A'_n: „žádní dva lidé nemají společné narozeniny“.

$$P(A_n) = 1 - P(A'_n) = 1 - \frac{V_n(365)}{V^*_n(365)} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}.$$

Vyčíslíme pro $n = 2, 3, 30, 33, 35$:

$$P(A_2) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-2)!}}{365^2} = \frac{1}{365} \doteq 0{,}002\,739\,726.$$

1	2	5	10	15	20	25	30	40	50
0	0,002 7	0,027	0,12	0,25	0,41	0,57	0,71	0,89	0,.97

□