

KMA/MAT1 Cvičení č. 11,

3. prosince 2013

[KS] Jaromír Kuben, Petra Šarmanová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. VŠB-TU Ostrava. Dostupné: <http://home1.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm>.

1 Limita a spojitost

Limity elementárních funkcí

Limity funkcí spojitých v bodě

Úloha 1 ([KS], Příklad 6.27). *Vypočtěte limity:*

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x,$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} e^x.$

Úloha 2 ([KS], Příklad 6.29). *Vypočtěte limity:*

- $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + x^2 + 3) (= 4),$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x} \left(= -\frac{1}{\pi} \right).$

Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Úloha 3 ([KS], Příklad 6.31). *Vypočtěte limity:*

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x),$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x),$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} x.$

Věta o limitě funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu

Úloha 4 ([KS], Příklad 6.34). *Vypočtěte limity:*

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} (= -2),$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} (= 2).$

Využití limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Úloha 5 ([KS], Příklad 6.42). *Vypočtěte limitu:*

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} (= 1)$.

Limita součinu „nulové“ a ohraničené funkce

Úloha 6 ([KS], Příklad 6.45). *Vypočtěte limitu:*

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos e^{x^2+x+1}}{x} (= 0)$.

Limita složené funkce

Věta 1.1. *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}$ a necht' platí*

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$,

ii) *funkce f je spojitá v bodě A .*

Pak složená funkce $f \circ g$ má v bodě x_0 limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(A).$$

Úloha 7 ([KS], Příklad 6.47). *Vypočtěte limitu:*

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) (= 1)$.

Příklady na spojitost funkce

Úloha 8 ([KS], Příklad 6.57). *Určete, zda jsou následující funkce spojité v bodě x_0 :*

- $x_0 = 1$, $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pro } x \neq 1, \\ 3 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$

- $x_0 = 2$, $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$.