# KMA/MAT1 Cvičení č. 12,

# 11. prosince 2013

## 1 Derivace

**Definice 1.1** (Derivace funkce v bodě)**.** *Nechť funkce $f$ je definovaná na nějakém $\varepsilon$-okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(x)}{h},$$

*pak se nazývá derivací funkce $f$ v bodě $c$. Značíme $f'(c)$.*

**Definice 1.2** (Derivace funkce jako funkce)**.** *Funkci, která každému bodu $x \in D(f)$ přiřazuje $f'(x)$ (pokud derivace v tomto bodě existuje), nazýváme derivací funkce $f$.*

### 1.1 Přehled derivací základních elementárních funkcí

(a) $(c)' = 0$

(b) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$

(c) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
$a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$,
speciálně $(e^x)' = e^x$

(d) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$,
$a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$,
speciálně $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(e) $(\sin x)' = \cos x$

(f) $(\cos x)' = -\sin x$

(g) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(h) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

(i) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

**Věta 1.3** (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí)**.** *Nechť $f$, $g$ jsou funkce mající derivaci v bodě $c$ a nechť $k \in \mathbb{R}$. Potom také funkce $k \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, (je-li $g(c) \neq 0$) mají derivaci v bodě $c$ a platí*

*(a)* $(k \cdot f)'(c) = k \cdot f'(c)$

*(b)* $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

*(c)* $(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)$

*(d)* $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$

*(e)* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$

**Věta 1.4** (o derivaci složené funkce)**.** *Nechť funkce $g$ má derivaci v bodě $c$ a nechť funkce $f$ má derivaci v bodě $g(c)$. Potom složená funkce $h = f \circ g$ (tj. funkce $h(x) = f(g(x))$ má derivaci v bodě $c$ a platí*

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(c).$$

**Věta 1.5.** *Má-li funkce $f$ v bodě $c$ derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

**Definice 1.6.** *Nechť funkce $f$ je definovaná na intervalu $\langle c, c+\varepsilon)$ $\Big((c-\varepsilon, c\rangle\Big)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right),$$

*pak ji nazýváme derivací funkce $f$ zprava (zleva) v bodě $c$ a označujeme je $f'_+(c)$ ($f'_-(c)$).*

**Věta 1.7.** *Funkce $f$ má v bodě $c$ derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné derivace a ty se sobě rovnají.*

**Definice 1.8.** *Uvažujme derivaci $f'$ funkce $f$. Derivaci funkce $f'$ budeme označovat $f''$ a nazývat druhou derivací funkce $f$. Obdobně, pro $n \geq 3$, je $n$-tá derivace $f^{(n)}$ derivací funkce $f^{(n-1)}$. Většinou značíme: $f'$, $f''$, $f'''$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $\ldots$.*

# 2 L'Hospitalovo pravidlo

## Limity typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

**Věta 2.1.** *Nechť funkce $f$ a $g$ jsou mají derivaci v prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \qquad \left(\text{typ} \quad \left[\frac{0}{0}\right]\right),$$

*nebo*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty, \qquad \left(\text{typ} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right).$$

*Jestliže existuje*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

*potom platí*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Toto platí i pro jednostranné limity.

# Příklady na cvičení

## Derivace

**Úloha 1** (Př. 7.15). *Vypočtěte $f'$, je-li $f$ dána předpisem:*

*a)* $f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2$,

*b)* $f(x) = -2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$,

*c)* $f(x) = xe^x$,

*d)* $f(x) = x^2 \cos x$,

*e)* $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$,

*f)* $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

## L'Hospitalovo pravidlo

### Limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

**Úloha 2** (Př. 8.15). *Vypočtěte následující limity:*

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

*b)* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$,

*c)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$,

*d)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,

*e)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $a \in (0,\infty)$.

**Úloha 3** (Př. 8.15). *Vypočtěte následující limity:*

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$,

*b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3+x-2}{3x^3-2x^2+x}$,

*c)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}$.

**Úloha 4** (Př. 8.18, zacyklení). *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Úloha 5** (Př. 8.19, nepoužitelnost LP – existence limity). *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}$.

### Limity typu $[\infty - \infty]$ a $[0 \cdot (\pm\infty)]$

**Úloha 6** (Př. 8.20). *a)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,

*c)* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.