KMA/MAT1 Přednáška a cvičení

Lineární algebra 1

9. a 14. října 2014

1 Vektory

- n-rozměrný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ (uspořádaná n-tice reálných čísel)

- x_i, $i = 1, \ldots, n$ — i-tá složka vektoru $\mathbf{x}$

- Součet dvou vektorů z $\mathbb{R}^n$ (musí mít stejný rozměr):

  $$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

  Výsledkem součtu dvou n-rozměrných vektorů je tedy opět n-rozměrný vektor.

- Násobení vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ reálným číslem (skalárem) $\alpha \in \mathbb{R}$:

  $$\alpha\mathbf{x} = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

  Úloha 1.1. *Vypočteme*

  a) $(5, -3, 9) + (2, 8, -13) = (7, 5, -4)$,
  b) $-\frac{1}{4}(4, 8, -1) = \left(-1, -2, \frac{1}{4}\right)$.

- $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ — n-rozměrný nulový vektor:

  $$\mathbf{x} + \mathbf{o} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}.$$

- $-\mathbf{x}$ — opačný vektor k vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tedy

  $$-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n), \qquad \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}.$$

2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

- Lineární kombinace (n-rozměrných) vektorů

$$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

s reálnými koeficienty

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k,$$

je (n-rozměrný) vektor

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots \alpha_k \mathbf{x}_k.$$

Úloha 2.1. *Lineární kombinací tří vektorů* $(2,3,4), (1,0,4), (1,1,1)$ *s koeficienty* $-1, 2, 5$ *je vektor*

$$-1(2,3,4)+2(1,0,4)+5(1,1,1) = (-2,-3,-4)+(2,0,8)+(5,5,5) = (5,2,9).$$

- Řekneme, že množina vektorů $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ je **lineárně závislá**, jestliže alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. V opačném případě řekneme, že je **lineárně nezávislá**.

- Lineární (ne)závislost se dá také vyjádřit pomocí vektorové rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{o},$$

kde neznámými jsou koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Tato rovnice má vždy tzv. triviální řešení

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

  - Pokud má pouze toto triviální řešení, potom jde o množina vektorů $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ lineárně nezávislá,
  - pokud existuje i netriviální řešení (alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$), potom je lineárně závislá.

Úloha 2.2. *Rozhodněte, zda množina vektorů* $\{(1,0,1), (-3,2,-1), (2,1,3)\}$ *lineárně závislá nebo nezávislá.*

Řešení. Budeme zkoumat rovnici

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(-3,2,-1) + \alpha_3(2,1,3) = (0,0,0),$$

$$(\alpha_1, 0, \alpha_1) + (-3\alpha_2, 2\alpha_2, -\alpha_2) + (2\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0).$$

Rozepíšeme ji po složkách (ve skutečnosti tedy jde o soustavu tří rovnic o třech neznámých):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

Tato soustava má kromě triviálního řešení

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

také netriviální řešení

$$\alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2,$$

a tak jde o lineárně závislou množinu vektorů. $\square$

3 Matice

- Schéma $m \times n$ reálných čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

nazýváme maticí typu (m, n).

Úloha 3.1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice typu $(3, 4)$.

- Čísla a_{ij} jsou prvky matice,
- prvky a_{ii} se nazývají diagonální a tvoří hlavní diagonálu.
- Matice typu (m, n) je tvořena m řádky a n sloupci.
- Jestliže jsou v matici typu (m, n), $m \leq n$, všechny diagonální prvky nenulové a všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové, pak mluvíme o **horní lichoběžníkové matici** (v případě $m = n$ o **horní trojúhelníkové matici**).

Úloha 3.2. *Matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *je horní lichoběžníková a matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *je horní trojúhelníková.*

- Matici typu (m, n), která má všechny prvky nulové nazýváme **nulová matice** a značíme $\mathbf{O}_{mn}$.

  Úloha 3.3. $\mathbf{O}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Jestliže $m = n$, pak matici nazýváme **čtvercovou** (pro $m \neq n$ mluvíme o **obdélníkové** matici).

- Čtvercovou matici typu (n, n), jejíž všechny diagonální prvky jsou rovny jedné a všechny ostatní prvky rovny nule, nazýváme **jednotkovou** maticí a značíme $\mathbf{E}_n$.

  Úloha 3.4. $\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 Hodnost matice

Hodností matice $\mathbf{A}$ nazýváme maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků, značíme $h(\mathbf{A})$.

- Jak určit hodnost matice?

- Najprve si řekneme, že hodnost každé horní lichoběžníkové matice typy (m, n), $m \leq n$, je m. (To znamená, že ji tvoří m lineárně nezávislých řádků.)

  Nebudeme to dokazovat obecně, jen si to ukážeme na jednom příkladu:

  Úloha 4.1. *Určete hodnost horní lichoběžníkové matice* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení. Ukážeme, že tato matice je tvořena trojicí lineárně nezávislých řádků. Řešíme vektorovou rovnici

$$\alpha_1(1,2,1,4) + \alpha_2(0,6,4,4) + \alpha_3(0,0,3,0) = (0,0,0,0).$$

Po složkách:

- 1. složka: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$, tedy $\alpha_1 = 0$.
- 2. složka: $\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 6 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$, tedy při $\alpha_1 = 0$ dostáváme $\alpha_2 = 0$.
- 3. složka: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 3 = 0$, tedy při $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ dostáváme $\alpha_3 = 0$.
- 4. složka: Rovnice $\alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$ je při $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ splněna.

Vyšlo nám tedy jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, a tak jde o trojici lineárně nezávislých řádků (vektorů). □

- Stejnou vlastnost mají i tzv. horní stupňovité matice:
  - Jestliže v matici má každý následující řádek více nul na začátku než řádek předchozí a poslední řádek je nenulový, pak tuto matici nazveme **horní stupňovitou maticí**.
  - Každá horní lichoběžníková matice je současně horní stupňovitá matice.
  - **Hodnost horní stupňovité matice je rovna počtu jejích řádků.**

Úloha 4.2. *Matice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *je horní stupňovitá matice.*

- Hodnost matice se nezmění, jestliže v ní provedeme následující úpravy:
  1. zaměníme pořadí řádků,
  2. vynásobíme některý řádek nenulovým číslem,
  3. přičteme k některému řádku lineární kombinaci zbývajících řádků,
  4. vynecháme řádek, který je lineární kombinací zbývajících řádků (tedy speciálně i nulový řádek),
  5. zaměníme pořadí sloupců.

Předchozí úpravy nazýváme ekvivalentní (zachovávají hodnost matice).

- **Gaussův algoritmus pro určení hodnosti matice:**
  - Danou matici převedeme pomocí ekvivalentních úprav na horní lichoběžníkovou (stupňovitou) matici, jejíž hodnost je rovna hodnosti výchozí matice.
  - Hodnost horní lichoběžníkové (stupňovité) matice je dána počtem jejích řádků.

Úloha 4.3. *Určete hodnost matice* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 13 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení. Máme vynulovat oblast matice vlevo dole pod diagonálou. Budeme postupovat po sloupcích od leva do prava.

1. První řádek ponecháme. Je výhodné, že na první pozici je jednička. Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku (značíme 2.ř.$-2\cdot$1.ř), ke třetímu řádku přičteme první řádek (3.ř.+1.ř) a ke čtvrtému přičteme dvojnásobek prvního (4.ř.+$2\cdot$1.ř.). Tím dostaneme matici (se stejnou hodností):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. V dalším kroku zaměníme druhý a třetí řádek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Od 4. řádku odečteme dvojnásobek druhého řádku (4.ř.-$2\cdot$2.ř.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Vynecháme čtvrtý řádek, neboť je stejný jako třetí řádek (je tedy lineární kombinací zbývajících řádků):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem je horní lichoběžníková matice, která má tři řádky, a tak i hodnost 3, stejně jako původní matice:

$$h(\mathbf{A}) = 3.$$

□

Úloha 4.4. *Určete hodnost matice* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -11 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Řešení. Matici **B** převedeme na horní lichoběžníkovou nebo stupňovitou matici (to se ukáže až během úprav):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -11 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 18 & -22 & 2 & -12 \\ 0 & -27 & 33 & -3 & 16 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & -27 & 33 & -3 & 16 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

kde v jednotlivých krocích byly provedeny následující úpravy:

1) 2.ř.$-2\cdot$1.ř., 3.ř.$-5\cdot$1.ř., 4.ř.$+4\cdot$1.ř.;
2) 3.ř.$\cdot\frac{1}{2}$ (třetí řádek vynásobíme $\frac{1}{2}$, nebo-li dělíme dvěma);
3) 3. řádek vynecháme (neboť je stejný jako druhý řádek), 4.ř.$+3\cdot$2.ř.

Výsledkem je horní stupňovitá matice o třech řádcích, a tak

$$h(\mathbf{B}) = 3.$$

□

5 Soustavy lineárních rovnic

- Soustava rovnic

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m, \\ \hline \end{array}$$

  kde a_{ij}, b_i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, jsou reálná čísla a x_j neznámé, se nazývá **soustava** m **lineárních rovnic o** n **neznámých**.

- Matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  se nazývá **matice soustavy** a matice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

  se nazývá **rozšířená matice soustavy**.

- **Řešením soustavy** nazýváme každý vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, jehož složky u_j (dosazené za x_j) přemění soustavu rovnic na soustavu rovností.

- **Frobeniova věta:** Označme hodnost matice soustavy h a hodnost rozšířené matice soustavy k.

  1. Jestliže $h < k$, pak soustava nemá řešení.
  2. Jestliže $h = k = n$, pak soustava má právě jedno řešení.
  3. Jestliže $h = k < n$, pak soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $(n - k)$ parametrech.

- **Gaussova metoda řešení soustav lineárních rovnic:**

  1. Napíšeme rozšířenou matici soustavy.

2. Pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme na horní stupňovitou matici (pokud budeme zaměňovat sloupce, dodržíme následující zásady:
   a) poslední sloupec pravých stran zůstane vždy na místě,
   b) při záměně sloupců zaměníme odpovídajícím způsobem také proměnné).
3. K získané matici napíšeme odpovídající soustavu lineárních rovnic, kterou už snadno vyřešíme.

Úloha 5.1. *Vyřešte soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a tu dále upravíme na horní stupňovitou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -2 \end{array}\right).$$

Výslednou matici přepíšeme zpět na soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 1, \\ 4x_3 - 9x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Ve druhé rovnici při volbě $x_4 = t$ dostaneme:

$$4x_3 - 9t = -2, \quad x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}t.$$

Dále z první rovnice, při volbě $x_2 = s$, dostaneme:

$$x_1 + 2s - \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{4}t\right) + 4t = 1, \quad x_1 + 2s + \frac{7}{4}t = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{2} - 2s - \frac{7}{4}t.$$

Řešením je tedy každý vektor tvaru

$$\left(\frac{1}{2} - 2s - \frac{7}{4}t, s, -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}t, t\right), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

například $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)$ (pro $s = t = 0$).

Výsledek odpovídá tvrzení Frobeniovy věty: hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je dva ($h = k = 2$). Vzhledem k tomu, že dále počet neznámých je čtyři ($n = 4$), tak soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - k = 4 - 2 = 2$ parametrech (s a t). □

Úloha 5.2. *Vyřešte soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji na horní stupňovitou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -4 & -4 & 16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & -2 \end{array}\right) \overset{*)}{\sim}$$

$$\overset{*)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$*$) 4. řádek vynásobíme 13 a odečteme od něho 9-ti násobek 3. řádku ($13 \cdot 9 - 9 \cdot 13 = 0$, $13 \cdot 7 - 9 \cdot 12 = -17$, $13(-2) - 9(-1) = -17$).

Výsledná horní stupňovitá (dokonce lichoběžníková) matice má čtyři řádky, takže hodnost rozšířené matice soustavy i matice soustavy je $h = k = 4$. Počet neznámých je také $4 = n$. Podle Frobeniovy věty má soustava právě jedno řešení. Nyní ho najdeme:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= 3 \\ 13x_3 + 12x_4 &= -1 \\ \boxed{x_4} &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 13x_3 + 12x_4 &= -1 \\ 13x_3 + 12(1) &= -1 \\ 13x_3 &= -13 \\ \boxed{x_3} &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= 3 \\ x_2 - 5(-1) - 4(1) &= 3 \\ x_2 + 1 &= 3 \\ \boxed{x_2} &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5 \\ x_1 - 2(2) + 3(-1) + (1) &= -5 \\ x_1 - 6 &= -5 \\ \boxed{x_1} &= 1 \end{aligned}$$

Řešení je tedy skutečně právě jedno, a to vektor $(1, 2, -1, 1)$. $\square$

Úloha 5.3. *Vyřešte soustavu rovnic:*

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 4z &=& 2, \\ 2x - 4y + 8z &=& 1. \end{array}$$

Řešení. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji na horní stupňovitou matici: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

Zpětně přepíšeme na soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 4z &=& 2, \\ 0 &=& -3. \end{array}$$

Zřejmě druhá rovnice nemá řešení, a tak ani celá soustava nemůže mít řešení.

Z pohledu Frobeniovy věty: hodnost rozšířené matice soustavy je $k = 2$, ale hodnost matice soustavy je jen $h = 1$. Máme tedy situaci, kdy $h \neq k$, z čehož podle Frobeniovy věty plyne neexistence řešení.

□

Další úlohy

Úloha 5.4. *Vyřešte soustavu rovnic:*

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 &=& -11, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 &=& 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &=& -3, \\ -6x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 - 12x_5 &=& -7. \end{array}$$

Řešení. • Rozšířenou matici soustavy převedeme na horní stupňovitou matici:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 4 & -1 & 1 & -7 & -11 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 1 & -12 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -1 & 1 & -7 & -11 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 1 & -12 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

- Přepíšeme zpět na soustavu:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 & = & 4, \\ x_3 + x_4 - x_5 & = & -3, \\ x_4 - 2x_5 & = & 1. \\ \hline \end{array}$$

- $h = k = 3$, $n = 5 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení závislých na $n - k = 5 - 3 = 2$ parametrech.

- Při volbě $x_5 = u$ a $x_2 = v$ je řešením každý vektor tvaru

$$4 - u - v, v, -4 - u, 1 + 2u, u), \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

  Pokud bychom místo x_2 volili $x_1 = w$ (a současně ponechali volbu $x_5 = u$), dostali bychom jinou parametrizaci řešení:

$$w, -8 + 2u + 2w, -4 - u, 1 + 2u, u), \qquad u, w \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 5.5. *Vyřešte soustavu rovnic:*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 & = & 4, \\ x_1 + 2x_3 & = & -2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 6x_4 & = & 7. \\ \hline \end{array}$$

Řešení. • Rozšířenou matici soustavy převedeme na horní stupňovitou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

- $h = 3$, $k = 4$, tedy $h \neq k$, a tak soustava nemá ani jedno řešení.
- To samé nahlédneme (z poslední rovnice) při přepisu zpět na soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 1, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 4, \\ x_3 + 5x_4 & = & 5, \\ 0 & = & 3. \end{array}$$

$\square$