KMA/MAT1 Přednáška a cvičení,

Lineární algebra 2

Řešení soustav lineárních rovnic se čtvercovou maticí soustavy

(Cramerovo pravidlo, determinanty, inverzní matice)

16. a 21. října 2014

- V dnešní přednášce se vrátíme k soustavám lineárních rovnic. Obecnou (Gaussovu) metodu jejich řešení jsme si uvedli minule.

- Dnes se zaměříme na soustavy n rovnic o n neznámých,

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \\ \hline \end{array}$$

  se (čtvercovou) maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  o plné hodnosti (takové matice budeme nazývat regulární).

- Z Frobeniovy věty víme, že v tomto případě, kdy

$$h = k = n,$$

  máme zajištěnu existenci právě jednoho řešení $(x_1, \dots, x_n)$.
  (Otázka: Proč má rozšířená matice soustavy také hodnost n?)

- Ukážeme si dva přístupy, jak toto řešení získat:

  1) pomocí Cramerova pravidla, kdy jsou jednotlivé složky řešení vyjádřeny jako podíly dvou determinantů,

2) pomocí inverzních matic.

K obojímu budeme potřebovat definice potřebných pojmů a návod, jak se s nimi počítá. Tím také začneme.

1 Determinanty a Cramerovo pravidlo

„Podněty ke vzniku a rozvoji teorie determinantů dávalo studium soustav lineárních rovnic, lineárních transformací, různých eliminačních postupů apod. Již koncem 18. století determinanty intenzivně pronikaly do geometrie, teorie čísel a dalších disciplín.

Za zrod teorie determinantů můžeme považovat zveřejnění monografie švýcarského matematika Gabriela Cramera z roku 1750, v níž bylo otištěno tzv. Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí a popsán výraz sestavený z koeficientů této soustavy, kterému dnes říkáme determinant. Zveřejněná metoda se poměrně rychle ujala, pozornost matematiků se po krátké době obrátila ke studiu takovýchto kombinatorických výrazů sestavených z koeficientů rovnic.“[1]

Motivační příklad:

Úloha 1.1. *Vyřešte soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých pro obecné koeficienty* $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$*:*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &=& b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &=& b_2. \\ \hline \end{array}$$

Řešení. Například z první rovnice vyjádříme

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}}{a_{11}} x_2$$

a dosadíme do druhé rovnice:

$$a_{21}\frac{b_1 - a_{12}}{a_{11}} x_2 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Odtud (po úpravě a také po vyjádření x_1):

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}},$$

zřejmě za předpokladu $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21} \neq 0$. □

[1] `http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400926/DejinyMat_35-2007-1_7.pdf`

Pro vyšší počet rovnic (se čtvercovou maticí soustavy, tedy $m = n$) se ukazuje, že výsledky mají podobnou strukturu, ale s rostoucím n rychle roste i délka zápisu jednotlivých složek řešení $x_1, \ldots, x_n$. Ke stručnějšímu a přehlednějšímu zápisu se začaly využívat zmíněné determinanty (podle také již zmíněného Cramerova pravidla, které si přesně vyslovíme až později).

Například předchozí výsledky se dají symbolicky (pomocí determinantů čtvercových matic) zapsat takto:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

- **Determinant:** Každé (pouze) čtvercové matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

typu (n, n) lze přiřadit jisté číslo, kterému říkáme determinant matice $\mathbf{A}$ a značíme $\det \mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$ nebo i přímo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pro výpočet determinantu budeme potřebovat následující definice a pravidla:

- **Subdeterminant** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$ je determinant matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce (matice typu $(n-1, n-1)$): značíme $\mathbf{A}^*_{ij}$.

Úloha 1.2. *Subdeterminantem prvku a_{12} v matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je determinant

$$A_{12}^* = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(vynechali jsme první řádek a druhý sloupec).

Subdeterminantem prvku 3 *v matici*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

je determinant

$$B_{22}^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(vynechali jsme druhý řádek a druhý sloupec).

- **Doplněk** prvku a_{ij} v matici **A**: $A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$.

  Úloha 1.3. *Doplňkem prvku* a_{12} *v matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je

$$A_{12} = (-1)^{1+2} A_{12}^* = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Subdeterminantem prvku 3 *v matici*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

je

$$B_{22} = (-1)^{2+2} B_{22}^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

- **Křížové pravidlo** pro výpočet determinantů matic typu $(2, 2)$:
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- **Laplaceova věta:** Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, n). Potom platí vzorec pro tzv.
  - rozvinutí determinantu podle prvků i-tého řádku
  $$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$
  - rozvinutí determinantu podle prvků j-tého sloupce
  $$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Úloha 1.4. *Pomocí rozvinutí podle prvků druhého řádku vypočtěte*
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Řešení.
$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \\ &= 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -2(-1) + 1(-2) + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.5. *Pomocí rozvinutí podle prvků třetího sloupce vypočtěte*
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Řešení.
$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = \\ &= 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1(-3) + 0 - 1(-3) = 0. \end{aligned}$$

□

- Jistě jste si všimli, že je výhodné pro rozvinutí použít řádek nebo sloupec, ve kterém je co nejvíce nul. V extrémním případě samých nul (nulový řádek nebo sloupec) nám pak okamžitě vyjde nulová hodnota determinantu.

- **Vlastnosti determinantu:**

  - Jestliže k některému řádku (sloupci) matice přičteme lineární kombinaci zbývajících řádků (sloupců), potom se hodnota determinantu nezmění.

    Úloha 1.6.

    $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

    (Od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku.)

  - Jestliže některý řádek (sloupec) je lineární kombinací zbývajících řádků (sloupců), potom je hodnota determinantu nula.

    (Speciální případy: nulový řádek (sloupec), dva stejné řádky (sloupce).)

  - Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) reálným číslem α, determinant výsledné matice bude α-násobkem determinantu původní matice.

    Úloha 1.7.

    $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

    (První matice má oproti druhé trojnásobný první řádek.)

  - Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) a označíme novou matici písmenem $\mathbf{B}$, potom platí:

    $$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}.$$

    Úloha 1.8.

    $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

- **Postup při výpočtu determinantu:** Pomocí výše uvedených úprav se snažíme upravit determinant matice typu (n, n) tak, aby měl v některém řádku (sloupci) co nejvíce nul. Pokud jsme nedošli k samým nulám (nulový determinant), tak podle tohoto řádku (sloupce) provedeme rozvinutí determinantu, čímž se sníží o jedničku jeho rozměr. Tento postup opakujeme tak dlouho, až dojdeme k determinantům matic typu $(2,2)$, které již vypočteme pomocí křížového pravidla.

Úloha 1.9. *Vypočteme*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{2)}{=}$$

$$\overset{2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{3)}{=} -4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{4)}{=}$$

$$\overset{4)}{=} 4 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & \boxed{1} & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{5)}{=} 4 \cdot 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \overset{6)}{=} 4(9+10) = 76.$$

Popis úprav:

1) *Rozvinutí podle druhého sloupce.*
2) *1.ř.−3.ř.*
3) *Rozvinutí podle prvního řádku.*
4) *1.ř.−2·2.ř.*
5) *Rozvinutí podle druhého sloupce.*
6) *Křížové pravidlo.*

- **Cramerovo pravidlo:**

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

Jestliže pro matici (této) soustavy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ platí $\det \mathbf{A} \neq 0$, pak daná soustava má právě jedno řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, přičemž platí:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{pro každé} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

kde $\mathbf{B}_i$ je matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že i-tý sloupec v matici $\mathbf{A}$ nahradíme sloupcem pravých stran a ostatní sloupce ponecháme beze změny.

Úloha 1.10. *Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -3, \\ 2x_1 + x_3 & = & 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 7. \end{array}$$

Řešení.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+2) = 4 \neq 0,$$

$$\det \mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 8,$$

$$\det \mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -4,$$

$$\det \mathbf{B}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \cdots = 12.$$

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{B}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{8}{4} = 2, \qquad x_2 = \frac{\det \mathbf{B}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-4}{4} = -1, \qquad x_3 = \frac{\det \mathbf{B}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Řešení soustavy je vektor $(2, -1, 3)$. □

Úloha 1.11. *Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu*

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2. \end{array}$$

Řešení. $\left[\text{Řešení} \quad (-2, 3, 2)\right]$ □

2 Základní operace s maticemi, inverzní matice

- Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ jsou matice typu (m, n) a $\alpha \in \mathbb{R}$.

  - **Součin čísla α a matice A:**

    $$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$$

    (každý prvek matice $\mathbf{A}$ vynásobíme číslem α, výsledkem je opět matice typu (m, n)).

  - **Součet matic $\mathbf{A}$** a $\mathbf{B}$:

    $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

    (sčítáme podle pozic po prvcích (jako u součtu vektorů), výsledkem je opět matice typu (m, n), matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ musí být stejného typu).

Úloha 2.1.

$$2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, které jsou typu (m, n) a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

  1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
  2) $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{mn} = \mathbf{A}$,
  3) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.

- **Násobení matic:** Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je typu (n, p).

  Potom matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu (m, p), pro kterou platí

  $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

  označujeme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a nazýváme součinem matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$ (v tomto pořadí).

  - Prvek c_{ij} vzniká vynásobením i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ s j-tým sloupcem matice $\mathbf{B}$.

- K tomu je potřeba, aby tento i-tý řádek a tento j-tý sloupec měly stejný počet prvků.
- Proto musí platit, že matice $\mathbf{B}$ má tolik řádků, kolik má matice $\mathbf{A}$ sloupců.
- Výsledná matice má pak tolik řádků, kolik jich má matice $\mathbf{A}$, a tolik sloupců, kolik jich má matice $\mathbf{B}$.

Úloha 2.2. *Vypočtěte* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ *pro matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) & 2\cdot -1 + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 3 & 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

- V předchozím případě nelze vypočítat $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, neboť matice $\mathbf{A}$ má jiný počet řádků (2) než má matice $\mathbf{B}$ sloupců (3).
- Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou matice a $\mathbf{E}$ je jednotková matice (vhodného rozměru). Potom každá z rovností

  1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{A}$,
  2) $\mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
  3) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$,
  4) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$,
  5) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$,

  platí, pokud mají příslušné operace smysl.

Inverzní matice

- Nechť $\mathbf{A}$ a X jsou čtvercové matice typu (n, n). Jestliže platí

  $$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}_n,$$

  potom X nazýváme **inverzní maticí** k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^{-1}$.
- Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n).

- Jestliže $h(\mathbf{A}) = n$, pak $\mathbf{A}$ nazýváme **regulární** maticí.
- Jestliže $h(\mathbf{A}) < n$, pak $\mathbf{A}$ nazýváme **singulární** maticí.

- Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ typu (n, n). Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

  1) $\mathbf{A}$ je regulární ($h(\mathbf{A}) = n$),
  2) $\det \mathbf{A} \neq 0$,
  3) k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$,
  4) matici $\mathbf{A}$ lze převést pomocí konečně mnoha ekvivalentních úprav na jednotkovou matici $\mathbf{E}_n$.

- **Adjungovaná matice:**

  - Nechť je dána čtvercová matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

  - Označme A_{ij} doplněk prvku a_{ij}.
  - Potom matici

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

  nazýváme **adjungovanou** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme $\operatorname{Adj} \mathbf{A}$.

Úloha 2.3. *K matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

určete $\operatorname{Adj} \mathbf{A}$.

Řešení. Vypočteme jednotlivé doplňky:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\operatorname{Adj} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

- **Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice:**
  Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, potom platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{Adj} \mathbf{A}.$$

Úloha 2.4. *Určete inverzní matici k matici* $\mathbf{A}$ *z předchozího příkladu.*

Řešení. Adjungovanou matici již známe. Nyní je potřeba vypočítat $\det \mathbf{A}$ a tím také zjistit, zda $\mathbf{A}$ je regulární ($\det a \neq 0$):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Odtud

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{Adj} \mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

- Je-li $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní k $\mathbf{A}$, potom je i $\mathbf{A}$ inverzní k $\mathbf{A}^{-1}$, tj.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

- **Výpočet inverzní matice pomocí ekvivalentních úprav:**
  - Zapíšeme danou (regulární) matici $\mathbf{A}$ ve dvojici se stejně rozměrnou jednotkovou maticí $\mathbf{E}_n$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

  - Nyní pomocí ekvivalentních úprav (kromě přehazování sloupců) převedeme na jednotkovou matici $\mathbf{E}_n$, přičemž stejné úpravy budeme vždy aplikovat i na pravou část matice (za svislou čarou).
  - V okamžiku, kdy se vlevo objeví $\mathbf{E}_n$, vpravo bude $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\mathbf{E}_n|\mathbf{A}^{-1}\right).$$

Úloha 2.5. *Tímto způsobem nalezněte inverzní matici k matici z předchozího příkladu.*

Řešení.

$$(\mathbf{A},\mathbf{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\mathbf{E}_3|\mathbf{A}^{-1}\right).$$

Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí inverzních matic

- Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \tag{$*$}$$

- Označme:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Soustavu $(*)$ lze nyní zapsat pomocí maticové rovnice:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

- Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, pak podle Frobeniovy věty existuje právě jedno řešení soustavy $(*)$. Vynásobíme-li předchozí rovnici maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva, dostaneme

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{AX} & = & \mathbf{B}, \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} & = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \\ \mathbf{E}_n X & = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \\ X & = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \end{array}$$

  což dává další možnost určování řešení soustavy $(*)$.

Úloha 2.6. *Pomocí inverzní matice vyřešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3, \\ 2x_1 + x_3 &= 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Řešení. Máme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dále z předchozích příkladů známe inverzní matici

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Podle vzorce máme

$$X = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$