KMA/MAT1 Přednáška č. 7,

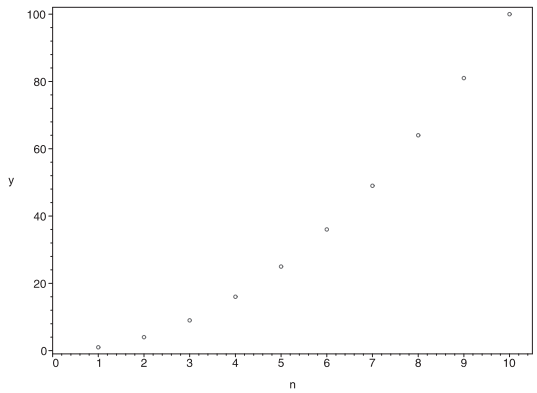
Posloupnosti a jejich limity

5. listopadu 2013

1 Motivační příklady

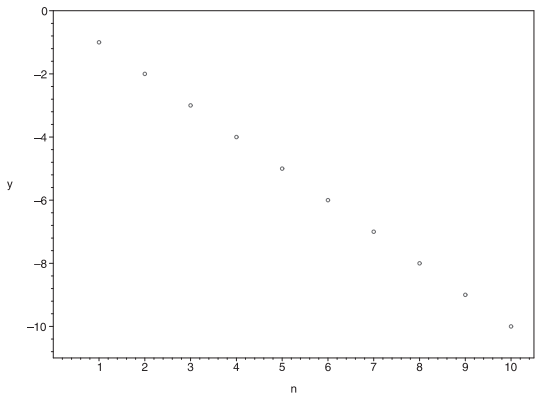
Prozkoumejme, zatím „laicky“, následující posloupnosti:

1) Posloupnost $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$:



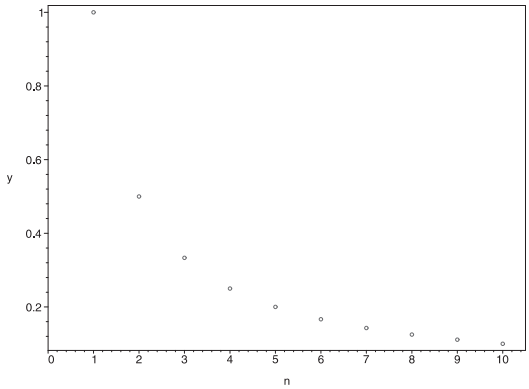
Hodnoty rostou nade všechny meze.

2) Posloupnost $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$:



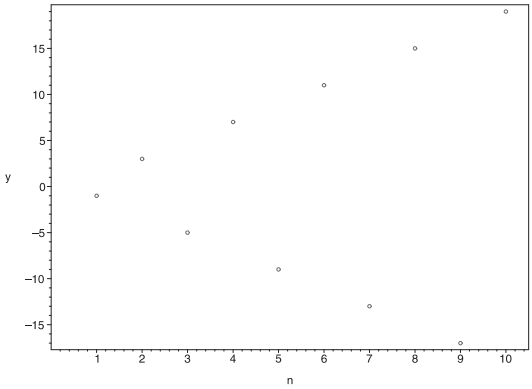
Hodnoty klesají pode všechny meze.

3) Posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$:



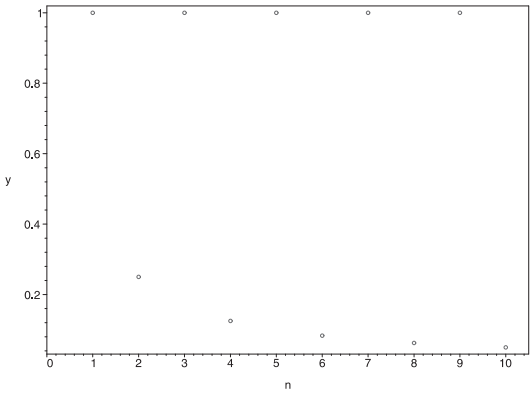
Hodnoty leží v intervalu $[0; 1)$ a s rostoucím n se blíží nule.

4) Posloupnost $1, -2, 3, -4, 5, \ldots, 2n-1, -2n, \ldots$:



Hodnoty střídají znaménko (oscilují) a rostou (v absolutní hodnotě) nade všechny meze.

5) Posloupnost $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1 \ldots, 1, \frac{1}{2^{2n}}, \ldots$:



2 Pojem posloupnosti

Definice 2.1. *Každé zobrazení* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{R}$ *nazýváme* ***číselná posloupnost****.*
Zápis:

$$\Big(a_n\Big)_{n=1}^{+\infty} \qquad \textit{nebo jen} \qquad \Big(a_n\Big);$$

a_n *se nazývá* n*-tý člen posloupnosti.*

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy, n-tým členem nebo rekurentně.

Úloha 2.2. *Je dána posloupnost*

$$\frac{1}{1\cdot 4},\ \frac{3}{4\cdot 7},\ \frac{5}{7\cdot 10},\ \frac{7}{10\cdot 13},\ \ldots$$

Určete její n*-tý člen.*

Řešení. $a_n = \dfrac{2n-1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$ □

Při zadání *n-tým členem* zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Úloha 2.3 (Příklady číselných posloupností zadaných n-tým členem)**.**

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{+\infty},\ \Big((-1)^n\cdot n\Big)_{n=1}^{+\infty},\ \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{+\infty},\ \Big(a\cdot q^{n-1}\Big)_{n=1}^{+\infty},\ \Big(a+(n-1)d\Big)_{n=1}^{+\infty}.$$

Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4.

Rekurentní definice obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

Rekurentní definice geometrické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q \notin \{0, 1, -1\}).$$

Úloha 2.4. *Posloupnost* $\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ *je zadána rekurentně takto:*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right);$$

je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$. *Vypočtěte první čtyři aproximace.*

Úloha 2.5. *Fibonacciova posloupnost* $\left(b_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ *je definována takto:*

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n.$$

Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Definice 2.6. *Posloupnost* $\left(b_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ *se nazývá* ***vybraná*** *z posloupnosti* $\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ *(nebo též* ***podposloupnost****), právě když existuje posloupnost přirozených čísel*

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$$

taková, že pro každé n *z* $\mathbb{N}$ *je*

$$b_n = a_{k_n}.$$

Jinými slovy: Z posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ *vybereme nekonečně mnoho jejích prvků a zachováme jejich pořadí.*

Úloha 2.7. *Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti* $\left(n\right)_{n=1}^{+\infty}$ *všech čísel přirozených:*

$$\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty} = \left(n\right)_{n=1}^{+\infty}: \qquad \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, 4, \boxed{5}, 6, \boxed{7}, 8, 9, \ldots$$

$$\left(b_n\right)_{n=1}^{+\infty}: b_1 = a_1 = 1, b_2 = a_2 = 2, b_3 = a_3 = 3, b_4 = a_5 = 5, b_5 = a_7 = 7, \ldots.$$

3 Rozšířená reálná osa

Definice 3.1. *Rozšířenou reálnou osou nazýváme množinu*

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

kde $-\infty$ *a* $+\infty$ *jsou nevlastní čísla, přičemž pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$-\infty < x < +\infty.$$

Početní operace s nevlastními čísly:

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

  $$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

  $$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

  $$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

  $$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

  $$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

  Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

  $$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

  $$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

  Pro $x > 0$ je

  $$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

  pro $x < 0$ je

  $$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

  $$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \text{atd.}, \quad \frac{x}{0} \quad \text{pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani} \quad \frac{0}{0} \quad \text{nebo} \quad \frac{\pm\infty}{0}.$$

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

  $$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

  $$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

4 Limita posloupnosti

Definice 4.1. *Říkáme, že posloupnost* $\left(a_n\right)$ ***má vlastní limitu*** $L \in \mathbb{R}$, *jestliže pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí*

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$

Úloha 4.2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \longrightarrow 0$$

Například pro $\varepsilon = \frac{1}{10}$ *můžeme volit* $n_0 = 11$.

Úloha 4.3 (Podrobněji)**.** *Dokažte z definice, že* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Řešení. Definice limity posloupnosti:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Upravíme pro naši situaci ($a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Řešíme tedy nerovnost

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Z podstaty nerovnosti $n > \frac{1}{\varepsilon}$ lze vyvodit, že pro dané $\varepsilon > 0$ je splněna od určitého n_0, například:

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \text{ dostaneme } n > \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10, \text{ a tedy } n_0 = 11,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} \text{ dostaneme } n > \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000, \text{ a tedy } n_0 = 1001.$$

Tím je dáno, že 0 je skutečně limitou posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. □

Definice 4.4. *Říkáme, že posloupnost* $\left(a_n\right)$ ***má nevlastní limitu*** $+\infty$, *jestliže pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *(*$K > 0$*) existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí*

$$a_n > K.$$

Píšeme

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

Úloha 4.5. $\lim\limits_{n \to \infty} n = +\infty$.

$$1, 2, 3, 4, \ldots \longrightarrow +\infty$$

Například pro $K = 1\,000$ *můžeme volit* $n_0 = 1\,001$.

Definice 4.6. *Říkáme, že posloupnost* $\left(a_n\right)$ ***má nevlastní limitu*** $-\infty$, *jestliže pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *(*$K < 0$*) existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí*

$$a_n < K.$$

Píšeme

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$$

Úloha 4.7. $\lim\limits_{n \to \infty} -n^2 = -\infty$.

$$-1, -4, -9, -16, \ldots \longrightarrow -\infty$$

Například pro $K = -10\,000$ *můžeme volit* $n_0 = 101$.

Definice 4.8. *Řekneme, že posloupnost* $\left(a_n\right)$ *je konvergentní, jestliže má vlastní limitu.*

Řekneme, že posloupnost $\left(a_n\right)$ *je divergentní, jestliže má nevlastní limitu nebo limitu nemá.*

Posloupnost tedy buď konverguje nebo diverguje. V tomto druhém případě buď diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$ nebo *osciluje* (tj. nemá limitu vlastní ani nevlastní).

Např. posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost $\left(c\right)$ je konvergentní a má limitu c, posloupnost $\left(\frac{n}{100}\right)$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost $\left(q^n\right)$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Věty o limitách:

Věta 4.9. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 4.10. *Má-li posloupnost*

$$\Big(a_n\Big)$$

limitu, pak každá posloupnost

$$\Big(b_n\Big)$$

vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ *má tutéž limitu.*

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a

2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.

– Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.

– Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různé limity, je daná posloupnost divergentní.

Věta 4.11 (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. *Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v* $\mathbb{R}^*$ *smysl:*

1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,

2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

3) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ *je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,

4) $\lim |a_n| = |a|$.

Konkrétní výpočty limit

Budeme používat předchozí věty a znalosti následujících limit posloupností:

1) $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & , \ \alpha > 0; \\ 1 & , \ \alpha = 0; \\ 0 & , \ \alpha < 0. \end{cases}$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , \quad q \in (-1,1); \\ 1 & , \quad q = 1; \\ +\infty & , \quad q > 1; \\ \text{neexistuje} & , \quad q \leq -1. \end{cases}$

3) Pro $q > 0$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Úloha 4.12. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+5n) = \Big[+\infty + (+\infty)\Big] = +\infty$.

Úloha 4.13.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(n^2-5n) &= \Big[+\infty - (+\infty)_{ND}\Big] = \lim_{n\to+\infty} n(n-5) = \\ &= \Big[+\infty \cdot (+\infty)\Big] = +\infty. \end{aligned}$$

Úloha 4.14.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4n+5}{4n^2+n-3} &= \left[\frac{+\infty}{+\infty}_{ND}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2})}{n^2(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}} = \left[\frac{3-0+0}{4+0-0}\right] = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5 Cvičení

Úloha 5.1. *Vypočtěte*

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100-\infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

5.1 Posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická

Aritmetická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

Aritmetickou posloupnost lze rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Úloha 5.2. *V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tisíc Kč, $a_2 = 354$ tisíc Kč a $a_3 = 383$ tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?*

Řešení. Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.) □

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d), \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d). \end{aligned}$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Úloha 5.3. *Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?*

Řešení. Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. □

Geometrická posloupnost je (definována jako) posloupnost, která je dána svým 1. členem a_1, konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Úloha 5.4. *V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o 5% větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1,05$, $n = 11$. Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1,629 = 489\,000 \text{ Kč}.$$

Viz poznámku za úlohou 5.2. □

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu 0 (pro $|q| < 1$) nebo a_1 (pro $q = 1$) nebo $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo nemá limitu (pro $q < -1$).

Praktický význam může mít opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. n-tý částečný součet geometrické řady).

Vzorec pro s_n lze odvodit takto: Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \end{aligned}$$

Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Úloha 5.5. *Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrno, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrnek obilí měl dostat?*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo. □

5.2 Limity podílu dvou polynomů

Úloha 5.6.

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 - n + 5}{5n^4 - 2n + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1}\right]_{nedef.} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2})}{n^4(5 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{n^2(5 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{+\infty(5 - 0 + 0)}\right] = 0. \end{aligned}$$

Úloha 5.7.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4-n+5}{5n^2-2n+1} &= \left[\frac{+\infty-\infty+5}{+\infty-\infty+1}\right]_{nedef.} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4(2-\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4})}{n^2(5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(2-\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4})}{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \left[\frac{+\infty(2-0+0)}{5-0+0}\right]\\
&= \left[\frac{2}{5}(+\infty)\right] = \operatorname{sgn}\frac{2}{5}(+\infty) = +\infty.
\end{aligned}$$

Úloha 5.8. *Vypočtěte* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3+5+\cdots(2n-1)}{n^2+1}$.

Řešení. V čitateli máme součet prvních n lichých čísel. Lichá čísla tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 1 a prvním členem také 1. Jedná se tedy o součet prvních n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1+a_n) = \frac{n}{2}\Big(1+(2n-1)\Big) = n^2.$$

Výraz v limitě tedy můžeme přepsat a dopočítat:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3+5+\cdots(2n-1)}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

□

5.3 Limity s n-tými odmocninami

Používáme „tabulkové“ limity (pro $a>0$) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$ a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Úloha 5.9. *Vypočtěte* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt[n]{\frac{1}{10}}-\sqrt[n]{2n}}{5\sqrt[n]{10}}$.

Řešení. Nejprve vypočteme dílčí limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{10}}=1$,
   neboť $(a)=\frac{1}{10}>0$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} = [1\cdot 1] = 1.$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{10}=1.$

Dohromady tedy dostáváme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt[n]{\frac{1}{10}} - \sqrt[n]{2n}}{5\sqrt[n]{10}} = \left[\frac{2\cdot 1 - 1}{5\cdot 1}\right] = \frac{1}{5}.$$

□

5.4 Limity s využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Úloha 5.10. *S využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ vypočtěte*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n - \sqrt{n^2 - n}}$.

Řešení.

ad a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = [\infty - \infty, \text{tedy nedef.}]$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \left[\frac{2}{\infty + \infty} = 0\right] =$$

0.

ad b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n - \sqrt{n^2 - n}} = [\dfrac{1}{\infty - \infty}, \text{tedy nedef.}]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 - n}} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{n^2 - (n^2 - n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n^2 - n}}{\sqrt{n^2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\infty}} = 1 + 1 = 2\right] = 2.$$

□