

KMA/MAT1 Cvičení č. 1,

21. září 2015

1 Úprava algebraických výrazů

První cvičení předchází první přednášku, a tak na rozpočítání volíme ze střední školy celkem známé pojmy a postupy.

Základem je manipulace s algebraickými výrazy (tj. výrazy, které jsou sestaveny z číslic, písmen-proměnných, operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, přirozených mocnin, odmocnin a také různých druhů závorek). Úpravy těchto výrazů patří mezi základní dovednosti v matematice. Umožňují nám daný výraz co nejvíce zjednodušit nebo zapsat v potřebném tvaru. Současně budeme hledat jakýsi definiční obor daného výrazu, obvykle půjde o soubor podmínek, za kterých daný výraz dává smysl (je definován, například nedělíme nulou nebo neodmocňujeme záporné číslo).

Také si připomeneme pojem polynom (což je také algebraický výraz), resp. kvadratický polynom a jeho reálné kořeny.

1.1 Polynomy

Obecný zápis polynomu n -tého stupně:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

Terminologie

- Stupeň polynomu: nejvyšší mocnina proměnné x .
- Kvadratický polynom: $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, resp. $ax^2 + bx + c$.
- Polynom prvního stupně (lineární): $P_1(x) = a_1 x + a_0$, resp. $ax + b$.
- Polynom nultého stupně: $P_0(x) = a_0$ (konstantní funkce).
- Nulový polynom: polynom nultého stupně, kde $a_0 = 0$.

Rozklad kvadratického polynomu na součin v reálném oboru

Kvadratický polynom $ax^2 + bx + c$ má reálné kořeny, pokud je jeho diskriminant D nezáporný:

$$D = b^2 - 4ac \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \in \mathbb{R}.$$

Při znalosti kořenů $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kvadratického polynomu můžeme psát

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

pro $x_1 = x_2$ tak dostaneme $P_2(x) = a(x - x_1)^2$.

Tomuto přepisu říkáme rozklad kvadratického polynomu. Může nám být užitečný při úpravách.

1.2 Vzorce užitečné při úpravách algebraických výrazů

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Vzorce s mocninami

Pro přirozená čísla r, s a reálná a, b platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s},$
- $a^r : a^s = a^{r-s}, a \neq 0,$
- $(a^r)^s = a^{rs},$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r,$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0,$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a \neq 0.$

Vzorce s odmocninami

Pro přirozená čísla n, p a nezáporná reálná a, b platí:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0$,
- $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m}) = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$,
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$.

1.3 Úlohy na úpravu algebraických výrazů

Úloha 1. Na součin převedete $x^3 - 8$. [Použijte vzorec pro $a^3 - b^3$.]

Řešení.

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Můžeme ještě zkousit rozložit kvadratický polynom $x^2 + 2x + 4$. To by šlo, pokud by měl reálné kořeny. Řešíme kvadratickou rovnici $x^2 + 2x + 4 = 0$:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0.$$

Diskriminant je záporný, tudíž neexistují reálná řešení (resp. kořeny), a tak je polynom $x^2 + 2x + 4$ v \mathbb{R} dále nerozložitelný. \square

Úloha 2 (EG, Př. 1.3.1 na str. 21). Zjednodušte algebraický výraz

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2 = \dots = \frac{a}{ab - 1}, \quad b \neq 0, a \neq 0, ab \neq \pm 1.$$

Úloha 3 (EG, Př. 1.3.3 na str. 23). Upravte

$$\frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2} \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}} = \dots = x, \quad x > 0.$$

Další příklady s racionálními lomenými funkcemi

Úloha 4 (EG, Př. 1.3.4 na str. 24). Upravte:

$$a) \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} : \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 49} = \dots = \frac{x - 7}{2}, \quad x \neq 2, x \neq \pm 7,$$

$$b) \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = \dots = \frac{2}{x + 5}, \quad x \neq \pm 5, x \neq -1.$$

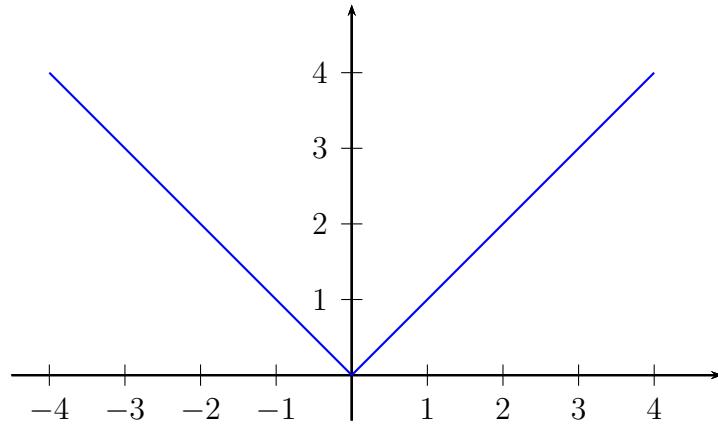
1.4 Absolutní hodnota

Funkci absolutní hodnota definujeme tzv. po částech:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Mezi hlavní vlastnosti této funkce patří (pro $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$):

- 1) $|x| \geq 0, \quad |x| \geq x, \quad |-x| = |x|,$
- 2) $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|,$
- 3) $|x_1 x_2| = |x_1| |x_2|,$
- 4) $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad x_2 \neq 0.$



Obrázek 1: Graf funkce absolutní hodnota.

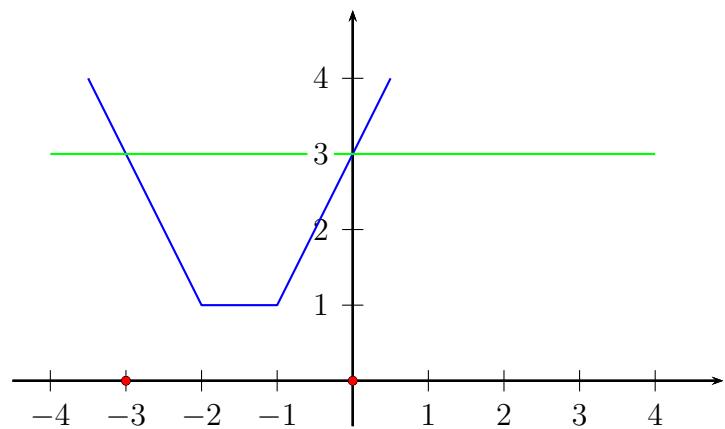
Rovnice s absolutní hodnotou

Pro lepší ilustraci uvádíme kromě výsledků i grafy levých a pravých stran jednotlivých rovnic.

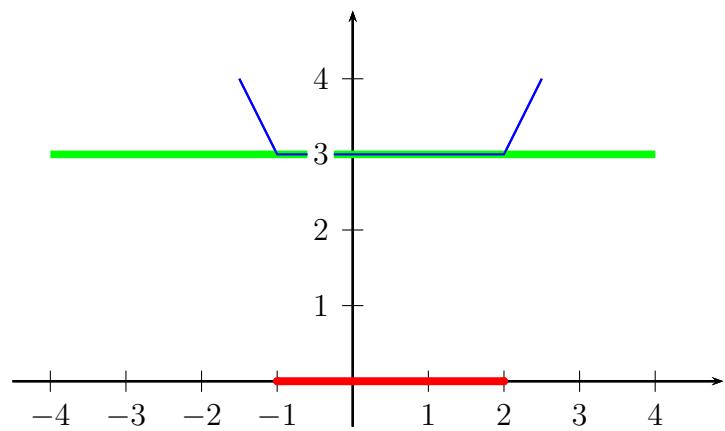
Úloha 5. Vyřešte rovnici $|x + 1| + |x + 2| = 3$. $[X = \{0, -3\}]$

Úloha 6. Vyřešte rovnici $|x + 1| + |x - 2| = 3$. $[X = \langle -1; 2 \rangle]$

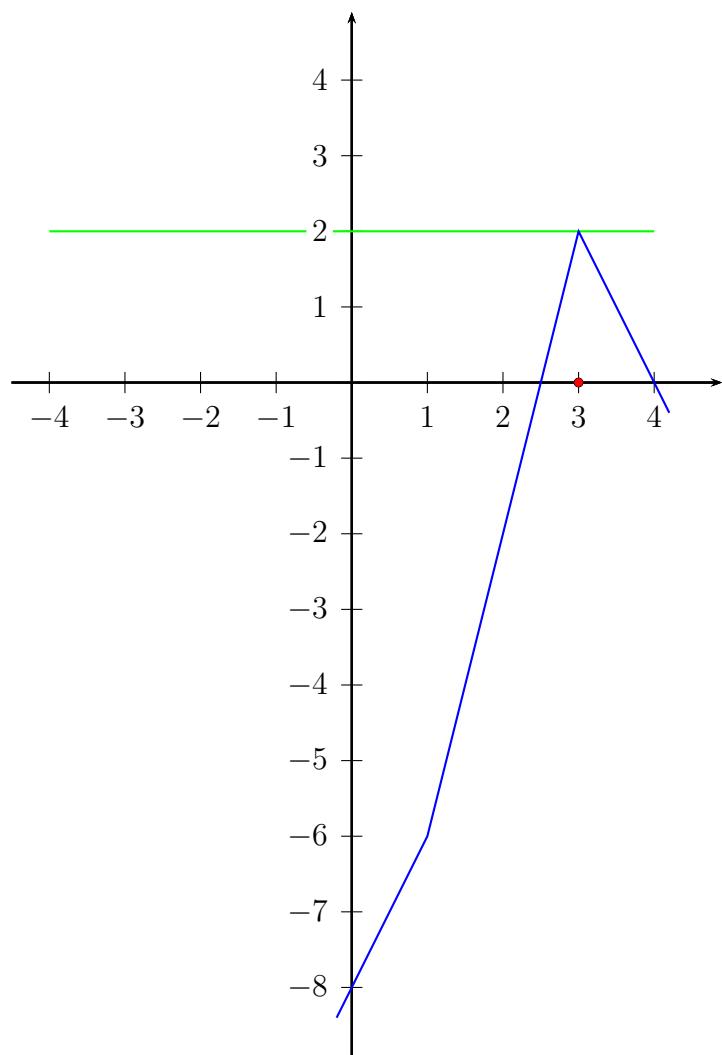
Úloha 7. Vyřešte rovnici $|x - 1| - 3|x - 3| = 2$. $[X = \{3\}]$



Obrázek 2: Znázornění grafického řešení úlohy 5.



Obrázek 3: Znázornění grafického řešení úlohy 6.



Obrázek 4: Znázornění grafického řešení úlohy 7.