KMA/MAT1 Cvičení č. 13,

10. a 14. prosince 2015

1 Průběh funkce

Poznámka 1.1. *Uvažujme množinu $M \subset \mathbb{R}$. Bod $x \in M$ je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset M$ (tedy takové ε-ové okolí bodu x, které je podmnožinou M).*

Vnitřní body intervalů $\langle a, b\rangle$, $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$ a (a, b), kde $a < b$, tvoří vždy otevřený interval (a, b).

Věta 1.2 (ryzí monotonie na intervalu)**.** *Jestliže funkce f je spojitá na intervalu J a jestliže pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), potom funkce f je na J rostoucí (klesající).*

Úloha 1. *Určete intervaly ryzí monotonie funkce $f(x) = x^3 - 3x$ (tj. určete, na kterých intervalech je funkce f rostoucí a na kterých je klesající).*

Definice 1.3 (Lokální extrémy)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě c lokální minimum (lokální maximum), jestliže existuje nějaké ε-ové okolí bodu c, tedy $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, tak, že platí*

$$f(x) \geq f(c) \qquad (f(x) \leq f(c)) \qquad \text{pro každé } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Definice 1.4 (Ostré lokální extrémy)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě c ostré lokální minimum (ostré lokální maximum), jestliže existuje nějaké prstencové ε-ové okolí bodu c, tedy $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$, tak, že platí*

$$f(x) > f(c) \qquad (f(x) < f(c)) \qquad \text{pro každé } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}.$$

Věta 1.5 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Jestliže funkce f má v bodě c lokální extrém a má v tomto bodě derivaci, pak nutně $f'(c) = 0$.*

Definice 1.6 (Stacionární bod)**.** *Bod c, pro který je $f'(c) = 0$, budeme nazývat stacionární bod (nebo bod podezřelý z extrému) funkce f.*

Věta 1.7 (postačující podmínka existence ostrého lokálního extrému)**.** *Jestliže $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$, pak funkce f má v bodě c ostré lokální minimum (ostré lokální maximum).*

Úloha 2. *Najděte ostré lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x$.*

Poznámka 1.8. *Ostré lokální extrémy je možné určovat také z intervalů ryzí monotonnosti.*

Věta 1.9. *Jestliže funkce f je spojitá na intervalu J a jestliže pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), pak funkce f je na J ryze konvexní ($\bigcup$) (ryze konkávní ($\bigcap$)).*

Úloha 3. *Najděte intervaly ryzí konvexity a ryzí konkavity funkce $f(x) = x^3 - 3x$.*

Definice 1.10 (inflexe)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě c inflexi, jestliže má v bodě c derivaci a jestliže pro nějaké $\varepsilon > 0$ je funkce f na intervalu $\langle c - \varepsilon, c\rangle$ ryze konvexní (ryze konkávní) a na intervalu $\langle c, c + \varepsilon\rangle$ ryze konkávní (ryze konvexní).*

Věta 1.11. *Jestliže $f''(c) = 0$ a $f'''(c) \neq 0$, pak funkce f má v bodě c inflexi. (Také říkáme, že bod $[c, f(c)]$ je inflexním bodem grafu funkce f.)*

Úloha 4. *Najděte body inflexe funkce $f(x) = x^3 - 3x$.*

Definice 1.12 (asymptoty grafu funkce)**.** *1) Přímka $x = c$ se nazývá vertikální (svislá) asymptota grafu funkce f, jestliže funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.*

2) Přímka $y = kx + q$ se nazývá asymptotou se směrnicí (šikmou asymptotou) grafu funkce f, jestliže platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R},$$

nebo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R}.$$

Úloha 5. *Najděte asymptoty grafu funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$*

Řešení. 1) Vertikální:

$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{\mp 2\}$, f je spojitá na $D(f)$, možnými kandidáty jsou tedy pouze přímky $x = -2$ a $x = 2$.

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^3}{4 - x^2} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty,$$

což je nevlastní limita, a tak je přímka $x = -2$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^3}{4 - x^2} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty,$$

což je opět nevlastní limita, a tak i přímka $x = -2$ je vertikální asymptotou grafu funkce f.

2) Asymptoty se směrnicí:

Pro $x \to +\infty$ máme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 = k \in \mathbb{R},$$

a tak můžeme přikročit k výpočtu q

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{4-x^2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 4x - x^3}{4-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0 = q \in \mathbb{R}.$$

Obě limity vyšly vlastní, a tak přímka $y = -1x + 0$, tedy $y = -x$, je asymptotou se směrnicí grafu funkce f pro $x \to +\infty$.

Na druhou stranu, pro $x \to -\infty$ máme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 = k \in \mathbb{R},$$

a tak můžeme opět přikročit k výpočtu q

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3}{4-x^2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 4x - x^3}{4-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0 = q \in \mathbb{R}.$$

Ukázalo se, že přímka $y = -x$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce f též pro $x \to -\infty$.

□

Celkové vyšetření průběhu funkce

Můžeme postupovat vyšetřováním následujících vlastností:

1) Definiční obor, průsečíky s osami x a y, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.

2) Zvláštnosti funkce: parita, periodičnost, spojitost, omezenost.

3) (Jednostranné) limity v „krajních“ (vlastních i nevlastních) bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti.

4) Intervaly ryzí monotonie.

5) Ostré lokální extrémy a jejich funkční hodnoty.

6) Intervaly ryzí konvexnosti a konkávnosti.

7) Inflexni body grafu funkce.

8) Asymptoty grafu funkce.

9) Nakreslíme grafy podle předchozích informací a určíme obor hodnot.

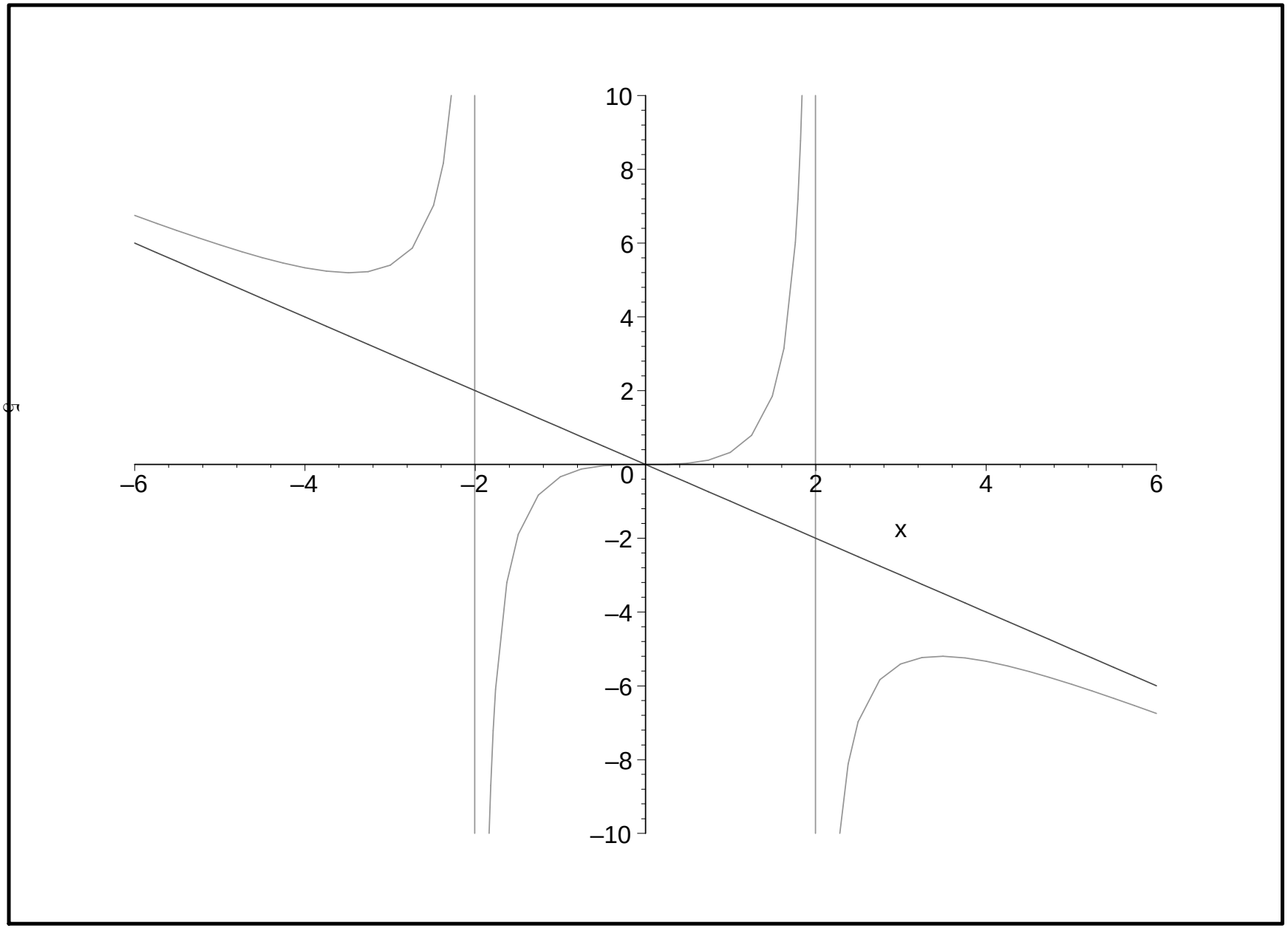
Úloha 6. *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

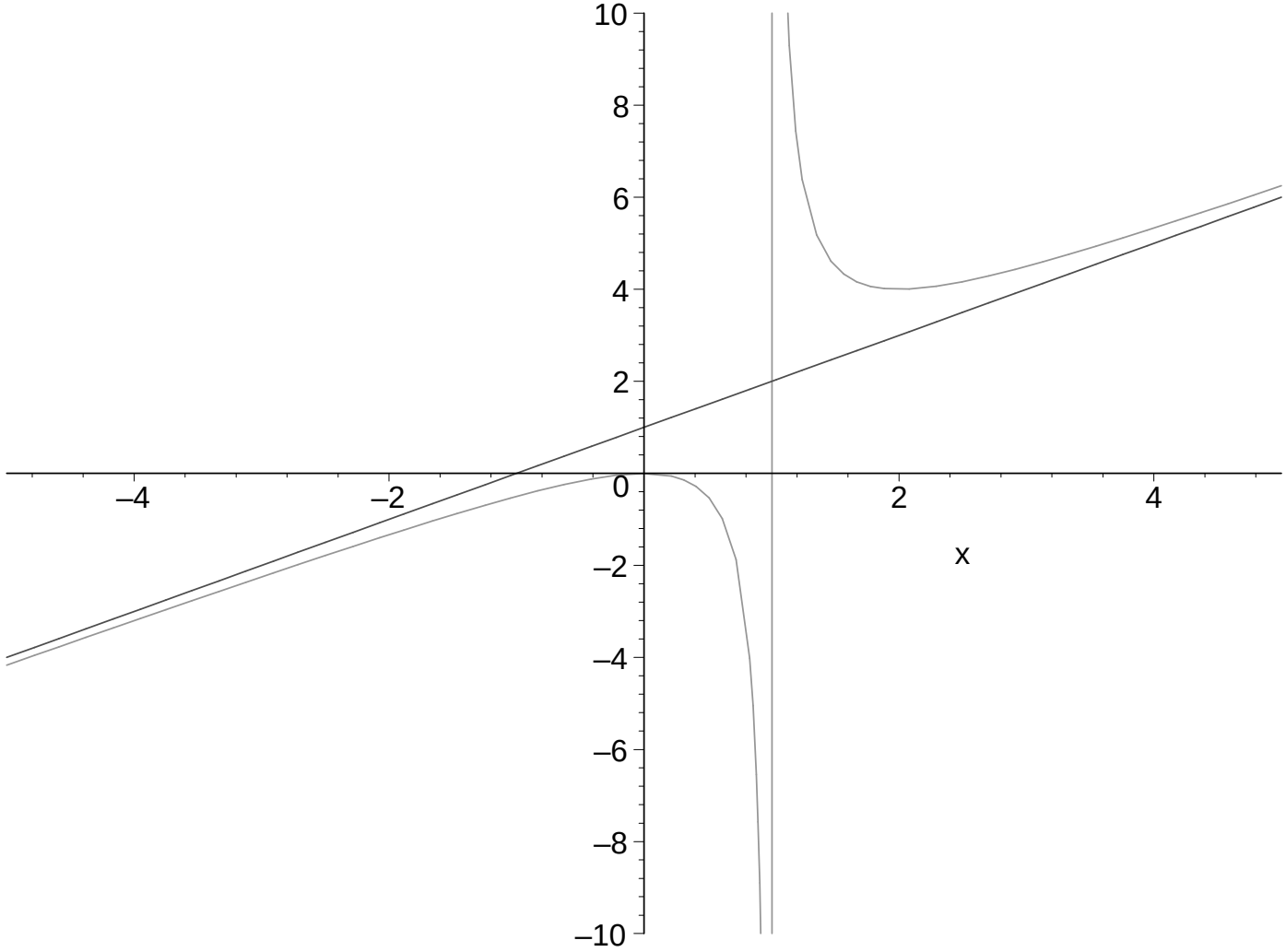
Cvičení:

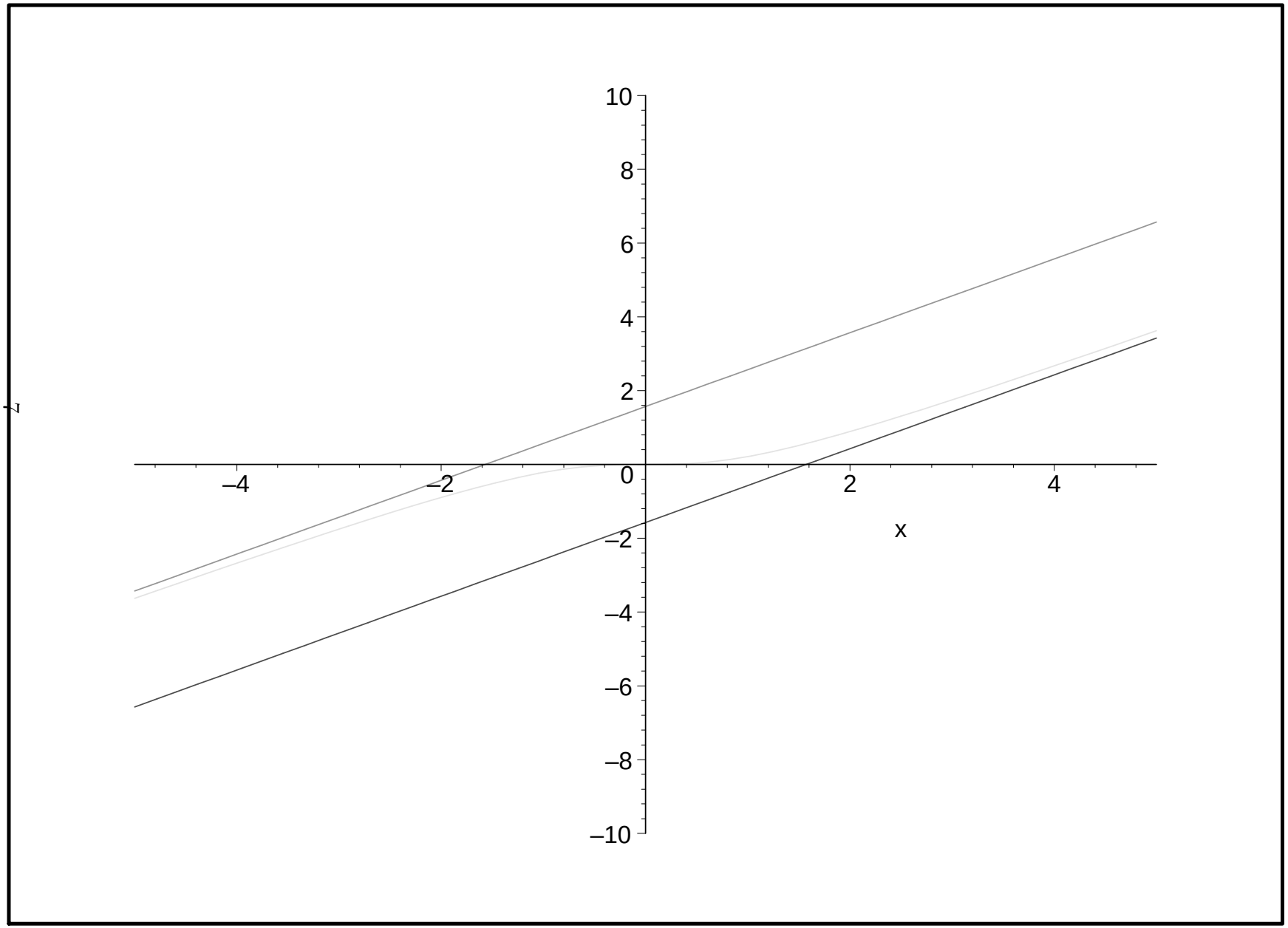
Úloha 7 (opakování z přednášky + dodělat)**.** *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

Úloha 8. *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

Úloha 9. *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = x - \operatorname{arctg} x$.


10
8
6
4
2
0
–2
–4
–6
–8
–10
–6
–4
–2
2
4
6
x
y


10
8
6
4
2
0
–2
–4
–6
–8
–10
–4
–2
2
4
x


10
8
6
4
2
0
–2
–4
–6
–8
–10
–4
–2
2
4
x
z