KMA/MAT1 Cvičení č. 12,

3. a 7. prosince 2015

1 Derivace

Definice 1.1 (Derivace funkce v bodě)**.** *Nechť funkce f je definovaná na nějakém ε-okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(x)}{h},$$

pak se nazývá derivací funkce f v bodě c. Značíme $f'(c)$.

Definice 1.2 (Derivace funkce jako funkce)**.** *Funkci, která každému bodu $x \in D(f)$ přiřazuje $f'(x)$ (pokud derivace v tomto bodě existuje), nazýváme derivací funkce f.*

1.1 Přehled derivací základních elementárních funkcí

(a) $(c)' = 0$

(b) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$

(c) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$,
speciálně $(e^x)' = e^x$

(d) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$,
$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$,
speciálně $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(e) $(\sin x)' = \cos x$

(f) $(\cos x)' = -\sin x$

(g) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(h) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

(i) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Věta 1.3 (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí)**.** *Nechť f, g jsou funkce mající derivaci v bodě c a nechť $k \in \mathbb{R}$. Potom také funkce $k \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, (je-li $g(c) \neq 0$) mají derivaci v bodě c a platí*

(a) $(k \cdot f)'(c) = k \cdot f'(c)$

(b) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(c) $(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)$

(d) $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$

(e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$

Věta 1.4 (o derivaci složené funkce)**.** *Nechť funkce g má derivaci v bodě c a nechť funkce f má derivaci v bodě $g(c)$. Potom složená funkce $h = f \circ g$ (tj. funkce $h(x) = f(g(x))$ má derivaci v bodě c a platí*

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(c).$$

Věta 1.5. *Má-li funkce f v bodě c derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Definice 1.6. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu $\langle c, c+\varepsilon)$ $\Big((c-\varepsilon, c\rangle\Big)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right),$$

pak ji nazýváme derivací funkce f zprava (zleva) v bodě c a označujeme je $f'_+(c)$ ($f'_-(c)$).

Věta 1.7. *Funkce f má v bodě c derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné derivace a ty se navzájem sobě rovnají.*

Definice 1.8. *Uvažujme derivaci f' funkce f. Derivaci funkce f' budeme označovat f'' a nazývat druhou derivací funkce f. Obdobně, pro $n \geq 2$, je n-tá derivace (značíme $f^{(n)}$) derivací funkce $f^{(n-1)}$. Většinou značíme: f', f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $\ldots$.*

2 L'Hospitalovo pravidlo

Limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Věta 2.1. *Nechť funkce f a g mají derivaci v prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \qquad \left(\textit{typ} \quad \left[\frac{0}{0}\right]\right),$$

nebo

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty, \qquad \left(\textit{typ} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right).$$

Jestliže existuje

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

potom platí

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Toto platí i pro jednostranné limity.

Příklady

Derivace

Úloha 1 (Př. 7.15). *Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:*

a) $f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2$,

b) $f(x) = -2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$,

c) $f(x) = xe^x$,

d) $f(x) = x^2 \cos x$,

e) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$,

L'Hospitalovo pravidlo

Limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Úloha 2 (Př. 8.15). *Vypočtěte následující limity:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$,

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $a \in (0,\infty)$.

Úloha 3 (Př. 8.15). *Vypočtěte následující limity:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$,

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3+x-2}{3x^3-2x^2+x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}$.

Úloha 4 (Př. 8.18, zacyklení). *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Úloha 5 (Př. 8.19, nepoužitelnost LP – existence limity). *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}$.

Limity typu $[\infty - \infty]$ a $[0 \cdot (\pm\infty)]$

Úloha 6 (Př. 8.20). *a)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.