KMA/MAT1 Cvičení č. 1,

20. září 2016

1 Komplexní čísla

Úloha 1. *Zobrazte komplexní čísla* $z_1 = 2+4\mathrm{i}$ *a* $z_2 = -3-2\mathrm{i}$ *jako body Gaussovy roviny, vypočtěte jejich absolutní hodnoty, určete k nim čísla komplexně sdružená. Vše na obrázku vyznačte.*

Řešení kvadratických nerovnic v oboru komplexních čísel

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad D = b^2 - 4ac.$$

Pro $D < 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Úloha 2 (EG, Příklad 4.5.8)**.** *Řešte v oboru komplexních čísel kvadratickou rovnici*

$$9x^2 - 6x + 10 = 0.$$

Proveďte zkoušku. $\left[x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \mathrm{i}\right]$

2 Absolutní hodnota

Funkci absolutní hodnota definujeme tzv. po částech:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{pro} \quad x < 0, \\ x & \text{pro} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Mezi hlavní vlastnosti této funkce patří (pro $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$):

1) $|x| \geq 0, \qquad |x| \geq x, \qquad |-x| = |x|,$

2) $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|,$

3) $|x_1 x_2| = |x_1|\,|x_2|,$

4) $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \qquad x_2 \neq 0.$

Rovnice s absolutní hodnotou

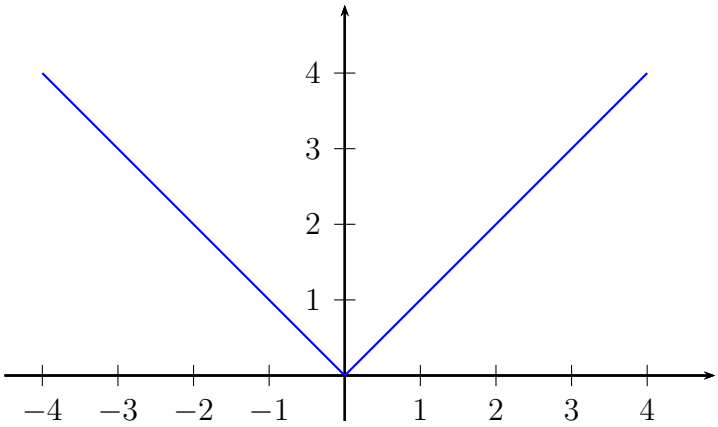
Pro lepší ilustraci uvádíme kromě výsledků i grafy levých a pravých stran jednotlivých rovnic.

Úloha 3 (z přednášky)**.** *Vyřešte rovnici* $|x-2|+|x-3|=6$. $\left[X=\left\{-\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right\}\right]$

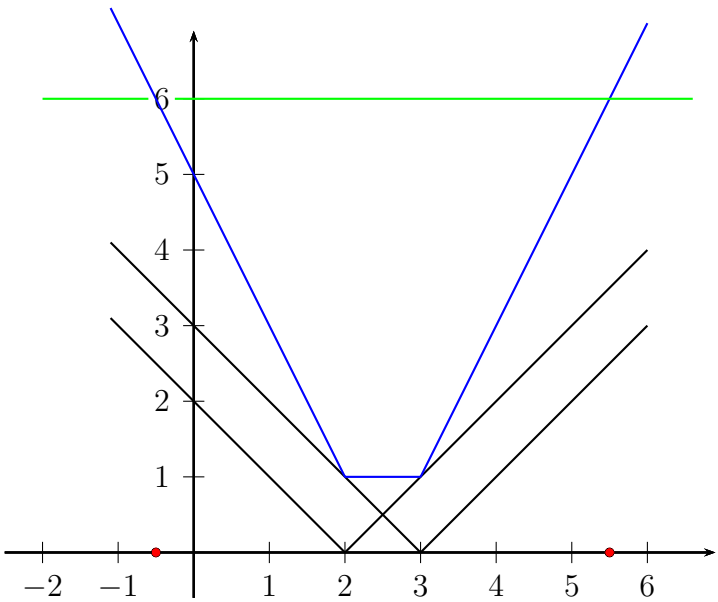
Úloha 4. *Vyřešte rovnici* $|x+1|+|x+2|=3$. $\left[X=\{0,-3\}\right]$

Úloha 5. *Vyřešte rovnici* $|x+1|+|x-2|=3$. $\left[X=\langle -1;2\rangle\right]$

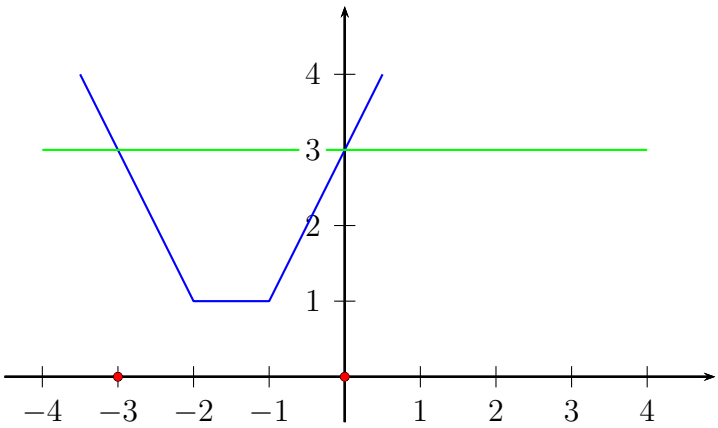
Úloha 6. *Vyřešte rovnici* $|x-1|-3\,|x-3|=2$. $\left[X=\{3\}\right]$



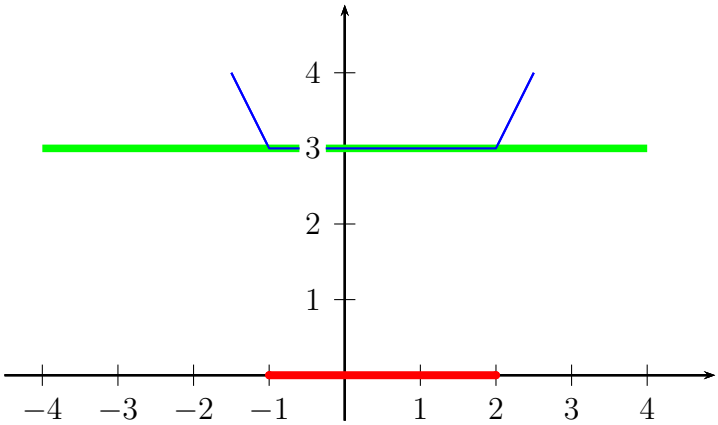
Obrázek 1: Graf funkce absolutní hodnota.



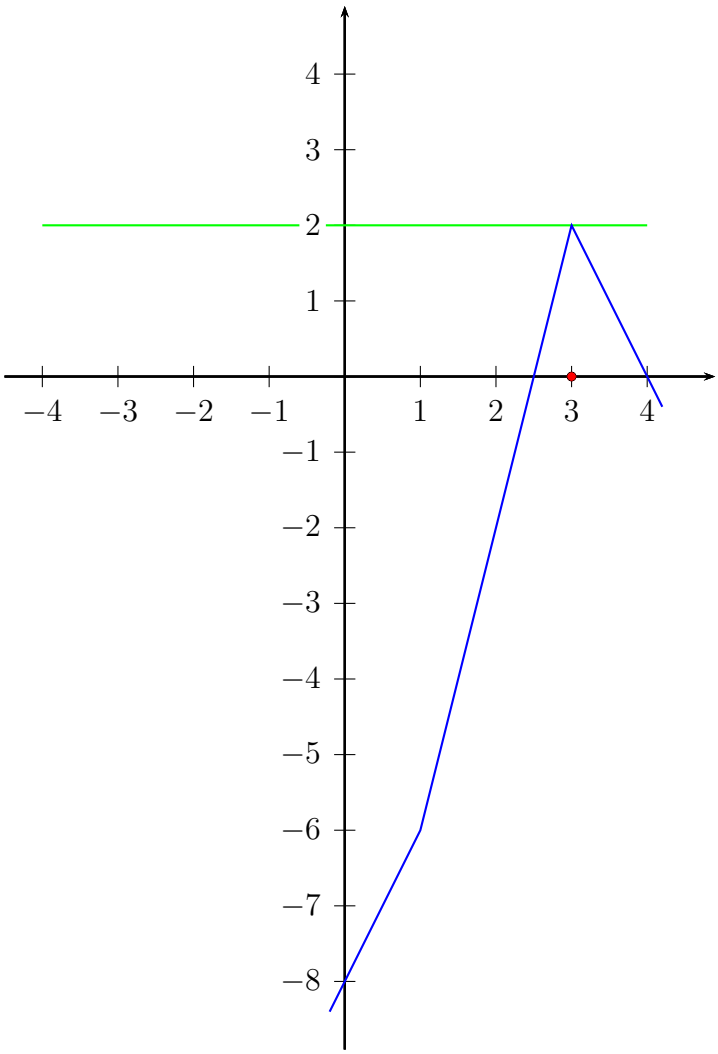
Obrázek 2: Znázornění grafického řešení úlohy 3.



Obrázek 3: Znázornění grafického řešení úlohy 4.



Obrázek 4: Znázornění grafického řešení úlohy 5.



Obrázek 5: Znázornění grafického řešení úlohy 6.

3 Úprava algebraických výrazů

Základem je manipulace s algebraickými výrazy (tj. výrazy, které jsou sestaveny z číslic, písmen-proměnných, operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, přirozených mocnin, odmocnin a také různých druhů závorek). Úpravy těchto výrazů patří mezi základní dovednosti v matematice. Umožňují nám daný výraz co nejvíce zjednodušit nebo zapsat v potřebném tvaru. Současně budeme hledat jakýsi definiční obor daného výrazu, obvykle půjde o soubor podmínek, za kterých daný výraz dává smysl (je definován, například nedělíme nulou nebo neodmocňujeme záporné číslo).

Také si připomeneme pojem polynom (což je také algebraický výraz), resp. kvadratický polynom a jeho reálné kořeny.

3.1 Polynomy

Obecný zápis polynomu n-tého stupně:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

Terminologie

- Stupeň polynomu: nejvyšší mocnina proměnné x.
- Kvadratický polynom: $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, resp. $ax^2 + bx + c$.
- Polynom prvního stupně (lineární): $P_1(x) = a_1x + a_0$, resp. $ax + b$.
- Polynom nultého stupně: $P_0(x) = a_0$ (konstantní funkce).
- Nulový polynom: polynom nultého stupně, kde $a_0 = 0$.

Rozklad kvadratického polynomu na součin v reálném oboru

Kvadratický polynom ax^2+bx+c má reálné kořeny, pokud je jeho diskriminant D nezáporný:

$$D = b^2 - 4ac \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \in \mathbb{R}.$$

Při znalosti kořenů $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kvadratického polynomu můžeme psát

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

pro $x_1 = x_2$ tak dostaneme $P_2(x) = a(x - x_1)^2$.

Tomuto přepisu říkáme rozklad kvadratického polynomu. Může nám být užitečný při úpravách.

3.2 Vzorce užitečné při úpravách algebraických výrazů

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Vzorce s mocninami

Pro přirozená čísla r, s a reálná a, b platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
- $a^r : a^s = a^{r-s}$, $a \neq 0$,
- $(a^r)^s = a^{rs}$,
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$,
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0$,
- $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}, \quad a \neq 0$.

Vzorce s odmocninami

Pro přirozená čísla n, p a nezáporná reálná a, b platí:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$,
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right) = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$,
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$.

3.3 Úlohy na úpravu algebraických výrazů

Úloha 7. *Na součin převeďte $x^3 - 8$. [Použijte vzorec pro $a^3 - b^3$.]*

Řešení.

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Můžeme ještě zkusit rozložit kvadratický polynom $x^2 + 2x + 4$. To by šlo, pokud by měl reálné kořeny. Řešíme kvadratickou rovnici $x^2 + 2x + 4 = 0$:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0.$$

Diskriminant je záporný, tudíž neexistují reálná řešení (resp. kořeny), a tak je polynom $x^2 + 2x + 4$ v $\mathbb{R}$ dále nerozložitelný. $\square$

Úloha 8 (EG, Př. 1.3.1 na str. 21)**.** *Zjednodušte algebraický výraz*

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^{2} = \cdots = \frac{a}{ab-1}, \qquad b \neq 0, a \neq 0, ab \neq \pm 1.$$

Úloha 9 (EG, Př. 1.3.3 na str. 23)**.** *Upravte*

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}} = \cdots = x, \quad x > 0.$$

Další příklady s racionálními lomenými funkcemi

Úloha 10 (EG, Př. 1.3.4 na str. 24)**.** *Upravte:*

a) $$\frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} : \frac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 49} = \cdots = \frac{x-7}{2}, \quad x \neq 2, x \neq \pm 7,$$

b) $$\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = \cdots = \frac{2}{x+5}, \quad x \neq \pm 5, x \neq -1.$$