KMA/MAT1 Cvičení č. 2,

27. září 2016

1 Komplexní čísla

Úloha 1 (srovnej EG, Příklad 4.5.1)**.** *Převeď te na goniometrický tvar komplexní čísla* $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ *a* $b = -8$ *a vypočtěte jejich třetí mocniny (použijte algebraický i goniometrický tvar čísel (Moivreovu větu), výsledky porovnejte (tzn., že goniometrický tvar třetí mocniny převedete na algebraický). Vše zakreslete do obrázku.*
$\Big[\ a = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right),\ b = 8\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right),\ a^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{2}\right) = 8\mathrm{i},$
$b^3 = 512\left(\cos 3\pi + \mathrm{i}\sin 3\pi\right) = -512\ \Big]$

2 Kombinatorika

	Bez opakování	S opakováním
Variace	$V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^*(n) = n^k$
Permutace	$P(n) = n!$	$P^*(n) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
Kombinace	$C_k(n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^*(n) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

- Variace k-té třídy z n prvků:

  = uspořádané skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

- Permutace n prvků:

  = uspořádané n-tice vybrané z n prvků.

- Kombinace k-té třídy z n prvků:

  = (neuspořádané) skupiny o k prvcích vybraných z n prvků.

Úloha 2. *Na startu běžeckého závodu je osm atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?*

Řešení. $V_3(8) = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336.$ $\square$

Úloha 3. *Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?*

Řešení. Počet 1-znakových $(- \ \cdot)$ + počet 2-znakových $(-- \ \ -\cdot \ \ \cdot- \ \ \cdot\cdot) + \cdots +$ počet 5-znakových $(----- \ \ \ldots \ \ -\cdots\cdot \ \ \cdots\cdot\cdot)$, tedy $V_1^*(2) + V_2^*(2) + V_3^*(2) + V_4^*(2) + V_5^*(2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62.$ $\square$

Úloha 4. *Najděte všechny permutace bez opakování z prvků množiny $M = \{1, 7, 9\}$.*

Řešení. $\{1, 7, 9\}, \{1, 9, 7\}, \{7, 1, 9\}, \{7, 9, 1\}, \{9, 1, 7\}, \{9, 7, 1\}.$
$3! = 6$ permutací. $\square$

Úloha 5 (Kombinatorika: souhrnný příklad)**.** *Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4 a 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:*

a) pětimístná, sudá;

b) pětimístná, končící dvojčíslím 21;

c) pětimístná, menší než 30 000;

d) trojmístná lichá;

e) čtyřmístná, větší než 2 000;

f) dvojmístná nebo trojmístná.

Řešení.

ad a) (pětimístná, sudá)

Dvě možnosti:

- Čísla tvaru XXXX2: na prvních čtyřech pozicích permutujeme všechny zbývající číslice 1,3,4,5. Těchto permutací je $P(4) = 4! = 24$.
- Čísla tvaru XXXX4: na prvních čtyřech pozicích permutujeme všechny zbývající číslice 1,2,3,5. Těchto permutací je také $P(4) = 4! = 24$.

Dohromady tedy máme $(24 + 24 =)48$ pětimístných sudých čísel.

ad b) (pětimístná, končící dvojčíslím 21)

XXX21, $3! = 6$.

ad c) (pětimístná, menší než 30 000)

1XXXX nebo 2XXXX, tedy $4! + 4! = 48$.

ad d) (trojmístná lichá)

XX1, XX3 nebo XX5, tedy $V_2(4) + V_2(4) + V_2(4) = 3 \cdot \dfrac{4!}{(4-2)!} = 3 \cdot 12 = 36$.

ad e) (čtyřmístná, větší než 2 000)

2XXX, 3XXX, 4XXX a 5XXX, tedy $V_3(4) + V_3(4) + V_3(4) + V_3(4) = 4 \cdot \dfrac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 24 = 96$.

ad f) (dvojmístná nebo trojmístná)

XX nebo XXX, tedy $V_2(5) + V_3(5) = \dfrac{5!}{(5-2)!} + \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!} + \dfrac{5!}{2!} = 20 + 60 = 80$.

$\square$