KMA/MAT1 Cvičení č. 8,

8. listopadu 2016

9 Funkce 1: vlastnosti, elementární

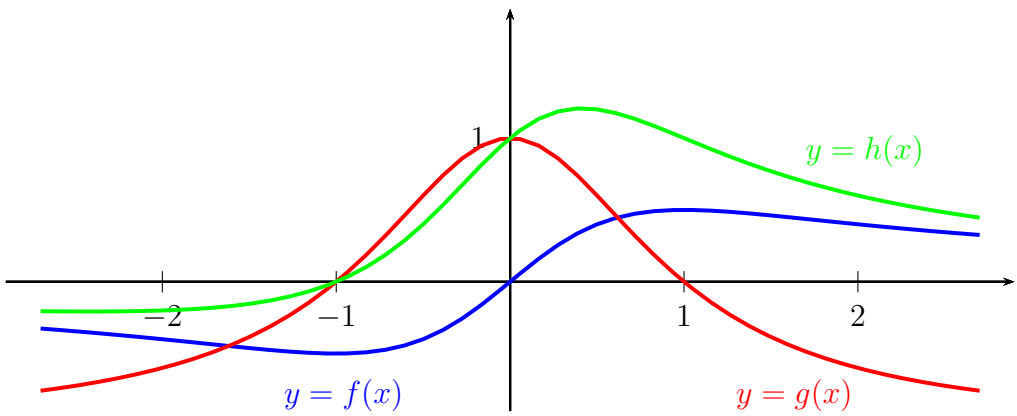
9.1 Parita

Úloha 1 (ŠK-3.17). *Určete paritu následujících funkcí:*

a) $f : y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, [*lichá*]

b) $g : y = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, [*sudá*]

c) $h : y = \dfrac{1+x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. [*ani lichá, ani sudá*]



Obrázek 1: Grafy k úloze 1: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ a $h(x) = \dfrac{1+x}{x^2+1}$.

9.2 Inverzní funkce

Věta 9.1 (ŠK-3.26)**.** *Nechť f je prostá funkce a f^{-1} funkce k ní inverzní. Potom platí*

(a) f^{-1} je prostá funkce.

(b) Je-li f rostoucí (klesající), potom je f^{-1} také rostoucí (klesající).

Úloha 2 (ŠK-3.27)**.** *Ověřte, že k funkci $f : y = \dfrac{x+2}{x-3}$ existuje inverzní funkce. Jestliže ano, tak ji najděte.*

Výsledky.

- Funkce f je prostá,
- $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$,
- $D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
- $H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Grafy: viz obrázek 2.

□

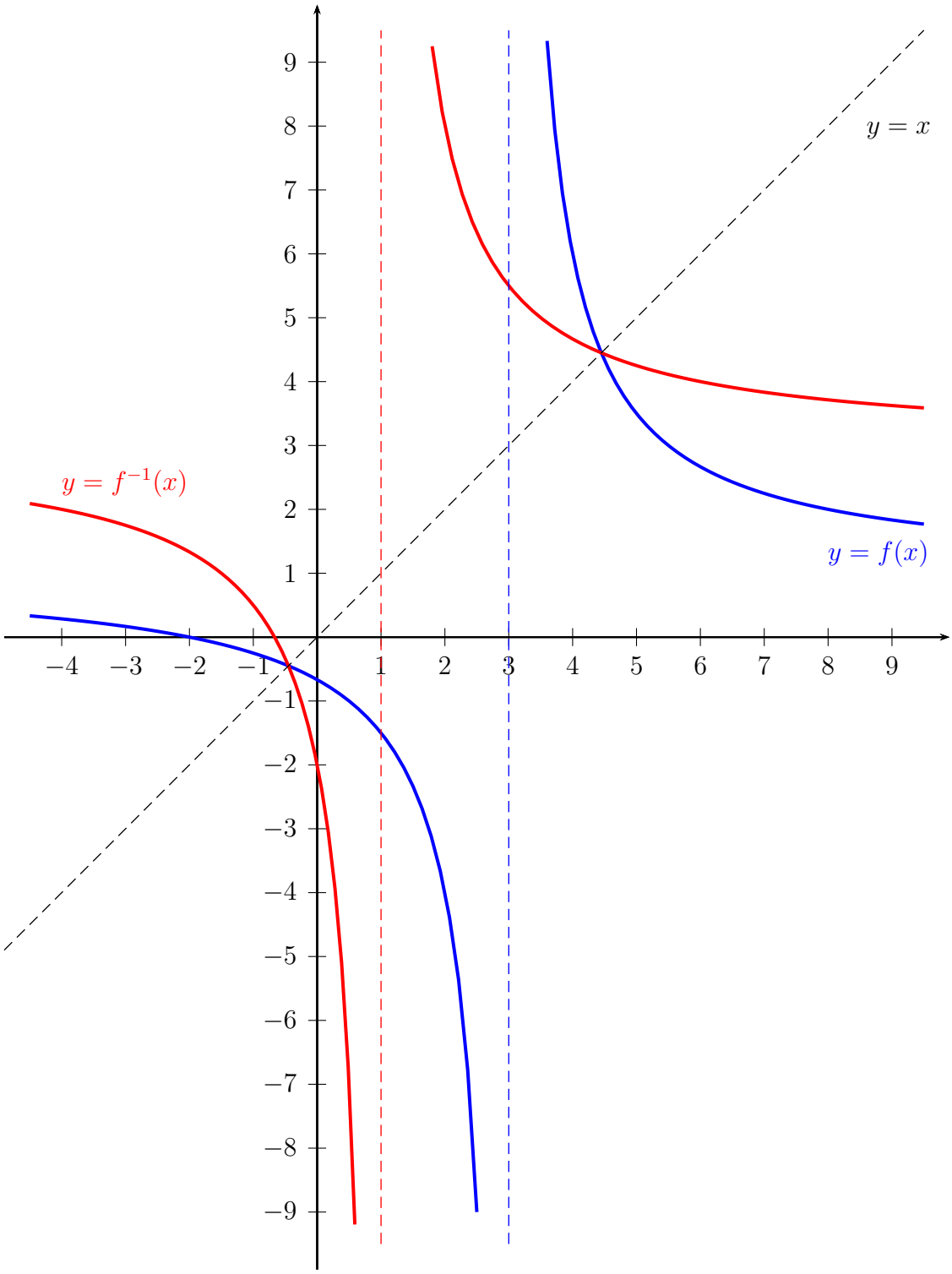
9.3 Transformace grafu funkce

Úloha 3. *Pomocí grafu funkce $f : y = x^2$ nakreslete grafy funkcí s funkčním předpisem $f_1(x) = -x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2$, $f_3(x) = (x+2)^2$ a $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$.*

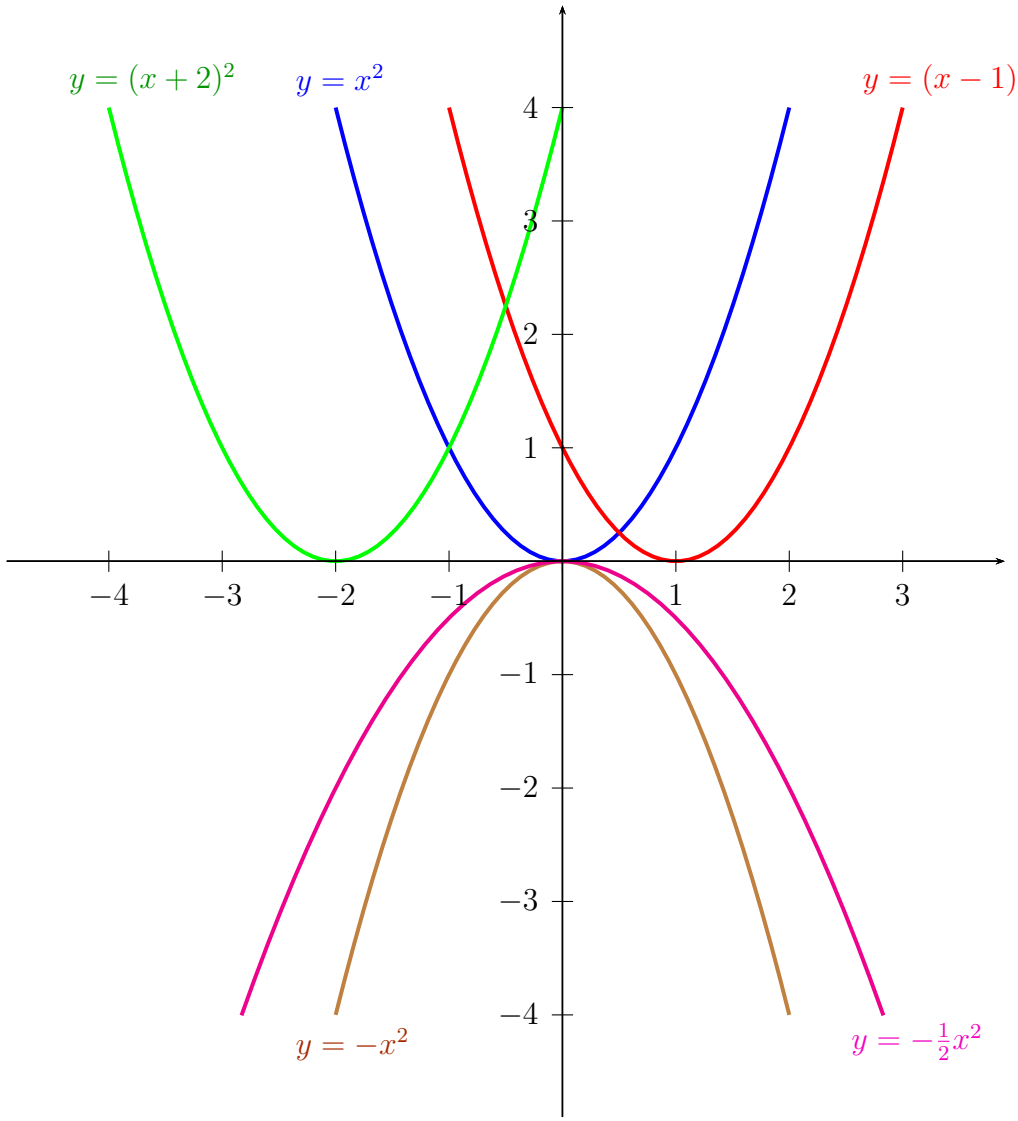
Výsledky. Grafy: viz obrázek 3. □

Úloha 4. *Pomocí grafu funkce $f_0 : y = |x|$ nakreslete graf funkce s funkčním předpisem $f(x) = -|x-2| + 3$.*

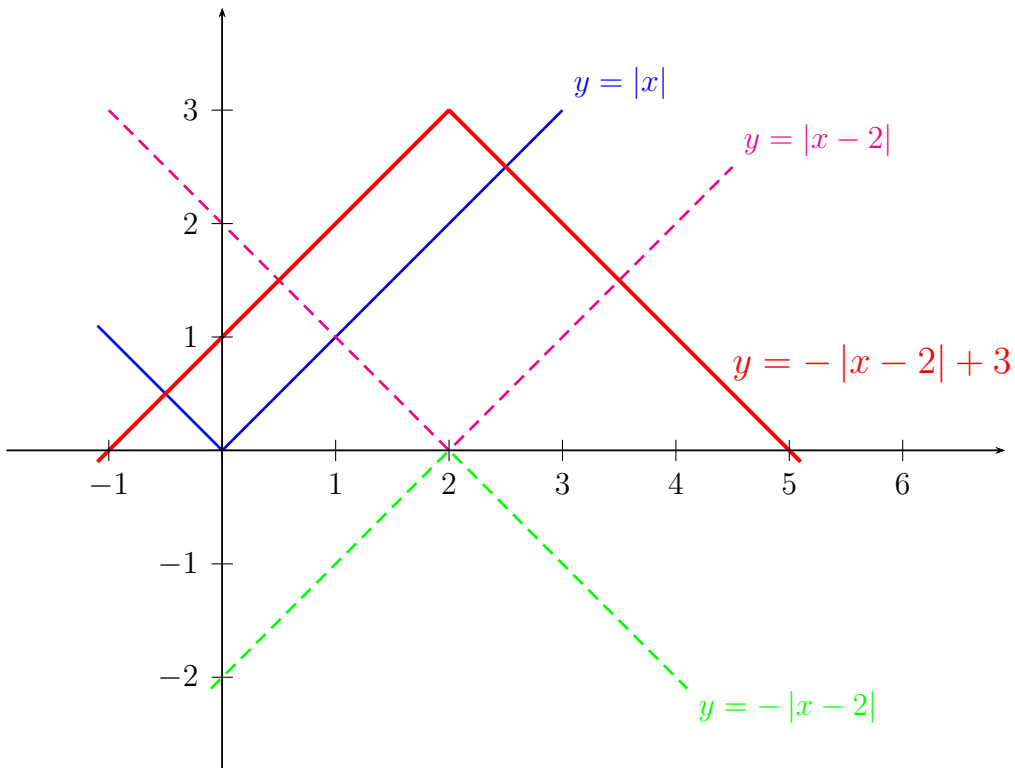
Výsledky. Postupně kreslíme grafy funkcí $f_1(x) = |x-2|$ (posun grafu o 2 doprava, $f_2(x) = -|x-2|$ (převrácení grafu kolem osy x) a nakonec $f(x) = -|x-2| + 3$ (posun o 3 nahoru). Grafy: viz obrázek 4. □



Obrázek 2: Grafy k úloze 2: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ a $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.



Obrázek 3: Grafy k úloze 3: $f(x) = x^2$, $f_1(x) = -x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2$, $f_3(x) = (x+2)^2$ a $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$.



Obrázek 4: Grafy k úloze 4: $f_0(x) = |x|$, $f_1(x) = |x - 2|$, $f_2(x) = -|x - 2|$ a $f(x) = -|x - 2| + 3$.

Elementární funkce

Základní elementární funkce:

- exponenciální a logaritmické,
- mocninné,
- goniometrické a cyklometrické,
- hyperbolické a hyperbolometrické.

Elementární funkce: funkce, které lze vytvořit ze zákl. elem. fcí pomocí konečného počtu operací

- sčítání,
- odčítání,
- násobení,
- dělení a
- skládání.

9.4 Funkce exponenciální a logaritmická

Exponenciální funkce o základu a

- Předpis: $f : y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Vlastnosti:
  - $D(f) = \mathbb{R}$,
  - $H(f) = (0, \infty)$,
  - ani sudá, ani lichá,
  - není periodická,
  - rostoucí pro $a > 1$,
  - klesající pro $a \in (0, 1)$.
- Pravidla: pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

9.4.1 Funkce logaritmická o základu a

je inverzní k funkci exponenciální, tedy

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x.$$

- Předpis: $f : y = \log_a x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$,
- Vlastnosti:
  - $D(f) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$,
  - $H(f) = \mathbb{R}$,
  - ani sudá, ani lichá,
  - není periodická,
  - rostoucí pro $a > 1$,
  - klesající pro $a \in (0, 1)$.
- Pravidla: pro všechna $x, y > 0$ a $s \in \mathbb{R}$ platí

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a x^s = s \log_a x.$$

Úloha 5 (ŠK-4.3)**.** *Určete definiční obor funkce* $f : y = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-3}{x+3}$.

Výsledky. $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. □

Úloha 6 (ŠK-4.6)**.** *Určete definiční obor funkce* $f : y = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$.

Výsledky. $D(f) = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2}, +\infty\right)$. □

Příklady k procvičení (str. 71-72) 1, 2, 3, 7 a 8.
Když zbude čas, tak další z příkladů k procvičení.