KMA/MAT1 Přednáška a cvičení č. 12,

7. prosince 2017

1 Průběh funkce

Opět budeme vycházet ze skript

[KS] Jaromír Kuben, Petra Šarmanová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. VŠB-TU Ostrava. Dostupné: `http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm`,

konkrétně jde o kapitolu č. 9 začínající na straně 243.

Nejprve se naučíme určovat dílčí vlastnosti funkcí, ze kterých posléze poskládáme celkový průběh funkce a budeme moci poučeně načrtnout její graf. Jmenovitě půjde o to určit (pomocí první a druhé derivace funkce):

- maximální intervaly ryzí monotonie vyšetřované funkce (co největší intervaly, na kterých funkce roste (klesá)),
- lokální extrémy funkce,
- maximální intervaly konvexity a konkavity vyšetřované funkce,
- inflexní body grafu funkce,
- asymptoty grafu funkce.

Společně s již ovládanými dovednostmi (definiční obory, parita, spojitost, limity) nám to umožní získat dostatečné množství informací o vyšetřované funkci.

Maximální intervaly ryzí monotonie

Věta 1.1 (ryzí monotonie na intervalu, viz také Věta 9.1 ve skriptech)**.** *Jestliže funkce f je spojitá na otevřeném intervalu $J = (a, b)$ a jestliže pro každý bod x intervalu J platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), potom funkce f je na J rostoucí (klesající).*

V praxi tedy budeme hledat maximální intervaly, kde je první derivace kladná (záporná).

Úloha 1. *Určete intervaly ryzí monotonie funkce $f(x) = x^3 - 3x$ (tj. určete, na kterých intervalech je funkce f rostoucí a na kterých je klesající).*

Řešení. $D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

f' je spojitá na $\mathbb{R}$. Měnit znaménko tedy může jen ve svých nulových bodech. Najdeme je:

$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad 3(x^2 - 1) = 0, \quad x_{1,2} = \pm 1.$$

Dva nulové body funkce nám rozdělují definiční obor na tři intervaly: $(-\infty, -1)$, $(-1; 1)$ a $(1, \infty)$. Na těchto intervalech již má f' vždy jen jedno znaménko. Vzhledem k tomu, že grafem f' je parabola otevřená nahoru, je f' kladná na krajních intervalech a záporná na prostředním intervalu. Pokud bychom takové úvahy (u složitější funkce) nebyli schopni, stačí dosadit z každého intervalu po jednom bodu. Tím získáme znaménko pro celý interval:

- Interval $(-\infty, -1)$: volíme $x = -2$, tedy $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$.

  f' je kladná na celém intervalu, a tak f je rostoucí na $(-\infty, -1)$.

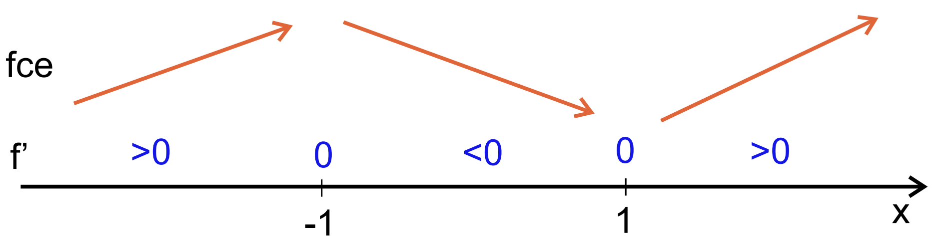
- Interval $(-1; 1)$: volíme $x = 0$, tedy $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$.

  f' je záporná na celém intervalu, a tak f je klesající na $(-1; 1)$.

- Interval $(1, \infty)$: volíme $x = 2$, tedy $f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$.

  f' je kladná na celém intervalu, a tak f je rostoucí na $(1, \infty)$.

Graficky to znázorníme pomocí následujícího diagramu:



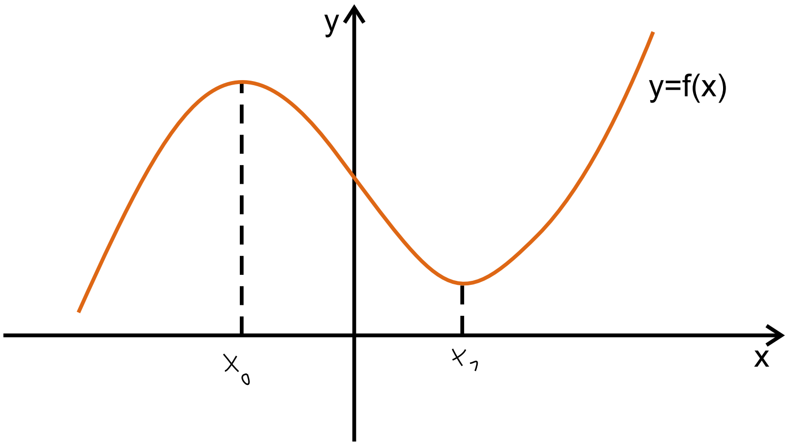
□

Řešené příklady ve skriptech:

9.2, 9.3 a 9.5.

Lokální extrémy

Lokální extrémy představují největší (nejmenší) funkční hodnotu na nějakém (malém) okolí. Na následujícím obrázku má funkce f lokální maximum v bodě x_0 (o hodnotě $f(x_0)$) a lokální minimum v bodě x_1 (o hodnotě $f(x_1)$):



Můžeme nahlédnout, že v tomto případě jde

- u lokálního maxima o přechod od růstu k poklesu a
- u lokálního minima o přechod od poklesu k růstu.

Podmíkou ovšem bylo, že funkce je v těchto bodech spojitá. Existence první derivace toto zaručuje. Všimněte si, že derivace je v této ukázce v těchto bodech nulová (pokud existuje, musí to tak být). Lokální extrém ale může existovat i v bodě, kde první derivace neexistuje. Například v bodě $x = 0$ má funkce $f : y = |x|$ lokální minimum a současně v něm nemá derivaci.

Přesnější definice:

Definice 1.2 (Lokální extrémy)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě c lokální minimum (lokální maximum), jestliže existuje nějaké ε-ové okolí bodu c, tedy $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, tak, že platí*

$$f(x) \geq f(c) \qquad (f(x) \leq f(c)) \qquad \text{pro každé } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Definice 1.3 (Ostré lokální extrémy)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě c ostré lokální minimum (ostré lokální maximum), jestliže existuje nějaké prstencové ε-ové okolí bodu c, tedy $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$, tak, že platí*

$$f(x) > f(c) \qquad (f(x) < f(c)) \qquad \text{pro každé } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}.$$

Věta 1.4 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Jestliže funkce f má v bodě c lokální extrém a má v tomto bodě derivaci, pak nutně $f'(c) = 0$.*

Definice 1.5 (Stacionární bod)**.** *Bod c, pro který je $f'(c) = 0$, budeme nazývat stacionární bod (nebo bod podezřelý z extrému) funkce f.*

Věta 1.6 (postačující podmínka existence ostrého lokálního extrému)**.** *Jestliže $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$), pak funkce f má v bodě c ostré lokální minimum (ostré lokální maximum).*

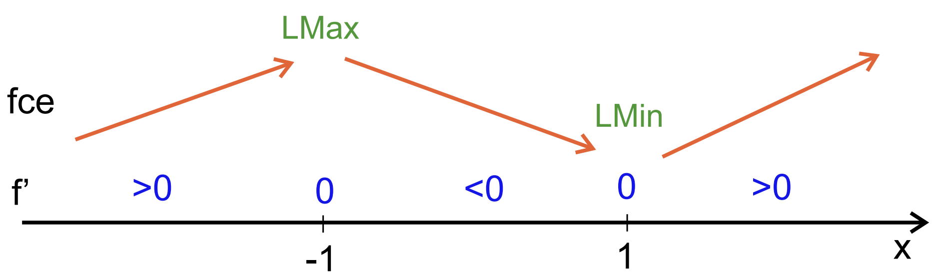
Poznámka 1.7. *Jak jsme již naznačili výše, pro nás bude jednodušší (účelnější) ostré lokální extrémy určovat z maximálních intervalů ryzí monotonnosti.*

Úloha 2. *Najděte ostré lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x$.*

Řešení. Pro tuto funkci jsme již vyšetřovali maximální intervaly ryzí monotonie. Máme tedy všechny potřebné informace:

- f i f' jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- Z diagramu vyčteme, že v bodě $x = -1$ dochází k přechodu z rostoucí na klesající. Funkce f tu má (ostré) lokální maximum o hodnotě $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.
- Z diagramu vyčteme, že v bodě $x = 1$ dochází k přechodu z klesající na rostoucí. Funkce f tu má (ostré) lokální minimum o hodnotě $f(1) = (1)^3 - 3(1) = -2$.

Vidíme, že maximální intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy spolu úzce souvisí. Budeme je tedy vyšetřovat a do diagramu zaznamenávat společně:



□

Řešené příklady ve skriptech:

9.8, 9.12, 9.13, 9.14 a 9.15.

Maximální intervaly ryzí konvexnosti a konkávnosti

Pro základní představu můžeme říci, že funkce $f : y = x^2$ je konvexní na $\mathbb{R}$, zatímco $g : y = -x^2$ je konkávní na $\mathbb{R}$.

Samozřejmě u složitějších funkcí to může být komplikovanější. Stejně jako funkce může mít intervaly na kterých je rostoucí (klesající), tak může mít i intervaly, kde je konvexní (konkávní).

V jednodušší definici můžeme říci, že funkce je konvexní tam, kde je její první derivace rostoucí (tedy $(f')' = f'' > 0$), a konkávní tam, kde je její první derivace klesající (tedy $(f')' = f'' < 0$). Samozřejmě tato definice předpokládá existenci obou derivací.

Podobně jako u přechodů monotonie jsme uvažovali lokální extrémy, zde při přechodech mezi konvexními a konkávními úseky (i v opačném pořadí) budeme uvažovat tzv. inflexe (inflexní body grafu) funkce.

Věta 1.8. *Jestliže funkce f je spojitá na intervalu $J = (a, b)$ a jestliže pro každý bod x intervalu J platí $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), pak funkce f je na J ryze konvexní ($\bigcup$) (ryze konkávní ($\bigcap$)).*

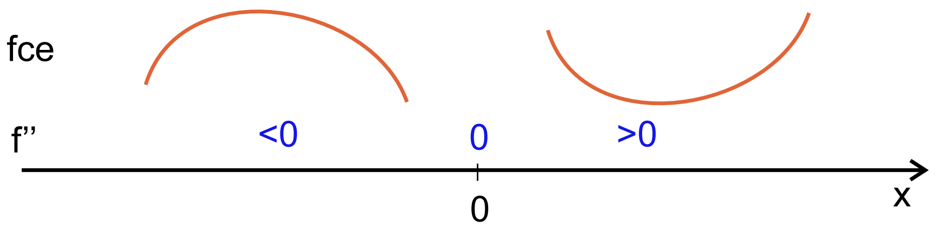
Úloha 3. *Najděte intervaly ryzí konvexity a ryzí konkavity funkce $f(x) = x^3 - 3x$.*

Řešení. Již víme, že $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ a $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nyní vypočteme $f''(x) = 6x$, přičemž také $D(f'') = \mathbb{R}$ a f'' je na $\mathbb{R}$ spojitá.

Jediným nulovým bodem druhé derivace je bod $x = 0$. Je snadné zjistit, že

- $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$, je zde tedy konkávní,
- $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$, je zde tedy konvexní.

Diagram znázorňující maximální intervaly ryzí konvexity a konkavity:



□

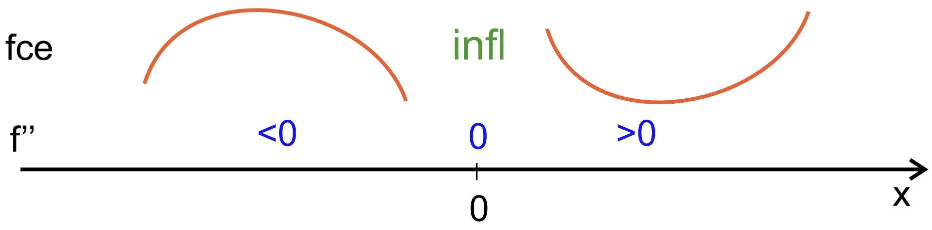
Definice 1.9 (inflexe)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě c inflexi, jestliže má v bodě c derivaci a jestliže pro nějaké $\varepsilon > 0$ je funkce f na intervalu $\langle c - \varepsilon, c\rangle$ ryze konvexní (ryze konkávní) a na intervalu $\langle c, c + \varepsilon\rangle$ ryze konkávní (ryze konvexní).*

Věta 1.10. *Jestliže $f''(c) = 0$ a $f'''(c) \neq 0$, pak funkce f má v bodě c inflexi. (Také říkáme, že bod $[c, f(c)]$ je inflexním bodem grafu funkce f.)*

Opět budeme spíše vycházet z diagramu vyšetřujícího konvexitu a konkavitu, kde přechody mezi nimi (pokud tam existuje f'', zpravidla je rovna nule).

Úloha 4. *Najděte body inflexe funkce* $f(x) = x^3 - 3x$.

Řešení. Opět využijeme předchozích výsledků a diagramu. K $x = 0$ doplníme nápis `infl`, který vyznačuje přítomnost inflexe:



Také doplníme souřadnice inflexního bodu grafu funkce, tedy v bodě $[0; f(0)] = [0; 0]$ přechází graf funkce z konkávního na konvexní zakřivení. $\square$

Řešené příklady ve skriptech:

9.30, 9.31 a 9.32.

Asymptoty grafu funkce

Asymptoty grafu funkce jsou přímky, které nám pomáhají lépe vystihnout—načrtnout graf funkce.

U asymptot rozlišujeme dva druhy:

- Svislé přímky (říkáme jim vertikální asymptoty), které nám pomáhají zachytit „únik“ grafu do $+\infty$ ($-\infty$) ve vlastním bodě.
  - Například přímka $x = \frac{\pi}{2}$ je vertikální asyptotou grafu funkce $\mathrm{tg}(x)$ (jednou z nekonečně mnoha).
  - Přímka $x = 0$, tedy osa y je vertikální asymptotou grafu funkce $\frac{1}{x}$ (jedinou).
- Šikmé přímky (mohou být i vodorovné, říkáme jim asymptoty se směrnicí), které nám pomáhají vyjádřit limitně lineární (přímkový) charakter grafu funkce pro x jdoucí k $+\infty$ nebo k $-\infty$.
  - Například osa x ($y = 0$) je asymptotou se směrnicí grafu funkce e^x pro $x \to -\infty$, nebo také v obou směrech pro graf funkce $\frac{1}{x}$.

Definice 1.11 (asymptoty grafu funkce)**.** *1) Přímka $x = c$ se nazývá vertikální (svislá) asymptota grafu funkce f, jestliže funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.*

2) Přímka $y = kx + q$ se nazývá asymptotou se směrnicí (šikmou asymptotou) grafu funkce f, jestliže platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R},$$

nebo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R}.$$

Úloha 5. *Najděte asymptoty grafu funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$*

Řešení. 1) Vertikální:

$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{\mp 2\}$, f je spojitá na $D(f)$, možnými kandidáty jsou tedy pouze přímky $x = -2$ a $x = 2$.

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^3}{4 - x^2} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty,$$

což je nevlastní limita, a tak je přímka $x = -2$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{4-x^2} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty,$$

což je opět nevlastní limita, a tak i přímka $x = -2$ je vertikální asymptotou grafu funkce f.

2) Asymptoty se směrnicí:

Pro $x \to +\infty$ máme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 = k \in \mathbb{R},$$

a tak můžeme přikročit k výpočtu q

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{4-x^2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 4x - x^3}{4-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0 = q \in \mathbb{R}.$$

Obě limity vyšly vlastní, a tak přímka $y = -1x + 0$, tedy $y = -x$, je asymptotou se směrnicí grafu funkce f pro $x \to +\infty$.

Na druhou stranu, pro $x \to -\infty$ máme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 = k \in \mathbb{R},$$

a tak můžeme opět přikročit k výpočtu q

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3}{4-x^2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 4x - x^3}{4-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0 = q \in \mathbb{R}.$$

Ukázalo se, že přímka $y = -x$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce f též pro $x \to -\infty$.

$\square$

Řešené příklady ve skriptech:

9.35, 9.38, 9.39 a 9.40.

Celkové vyšetření průběhu funkce

Můžeme postupovat vyšetřováním následujících vlastností:

1) Definiční obor, průsečíky s osami x a y, intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná.

2) Zvláštnosti funkce: parita, periodičnost, spojitost, omezenost.

3) (Jednostranné) limity v „krajních“ (vlastních i nevlastních) bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti.

4) Intervaly ryzí monotonie.

5) Ostré lokální extrémy a jejich funkční hodnoty.

6) Intervaly ryzí konvexnosti a konkávnosti.

7) Inflexni body grafu funkce.

8) Asymptoty grafu funkce.

9) Nakreslíme grafy podle předchozích informací a určíme obor hodnot.

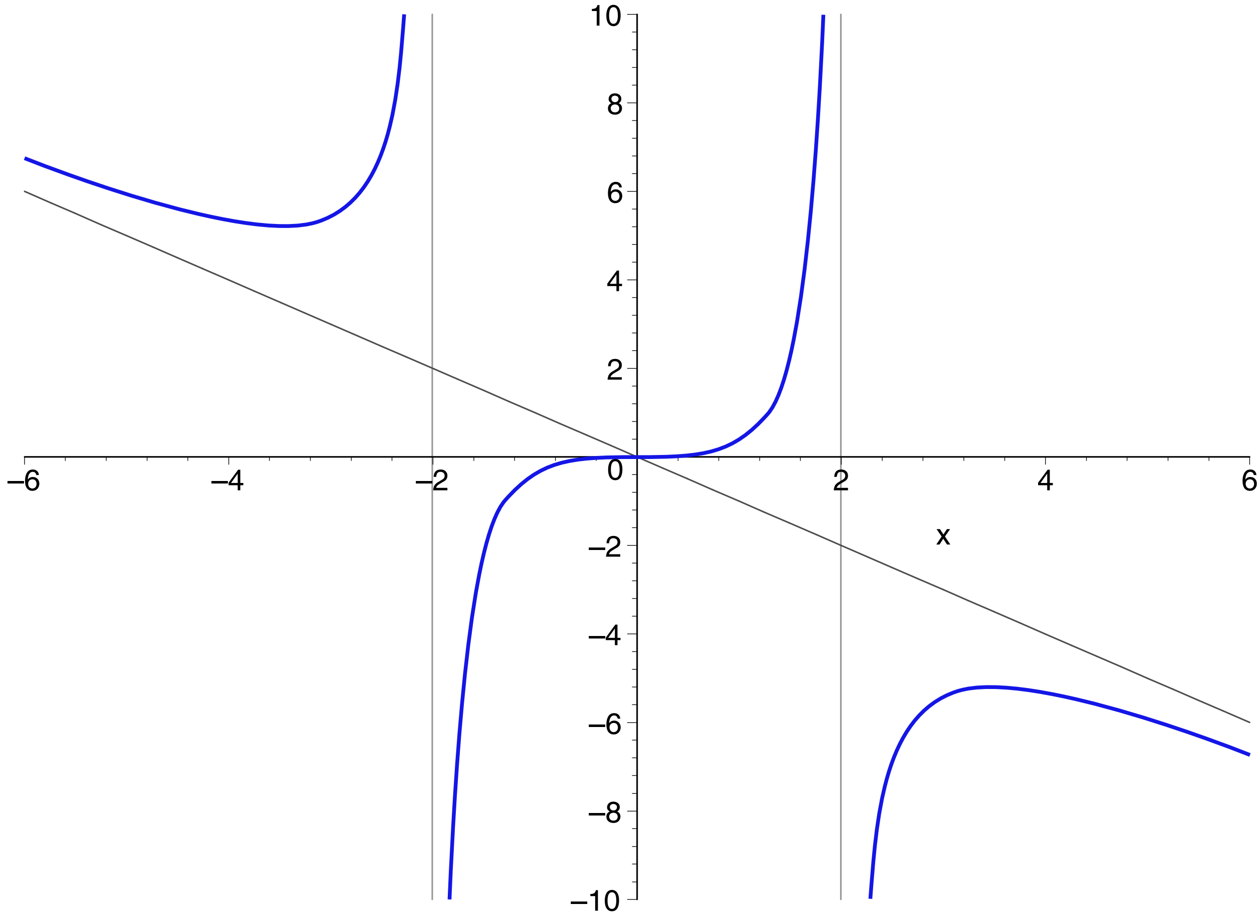
Úloha 6. *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

Cvičení:

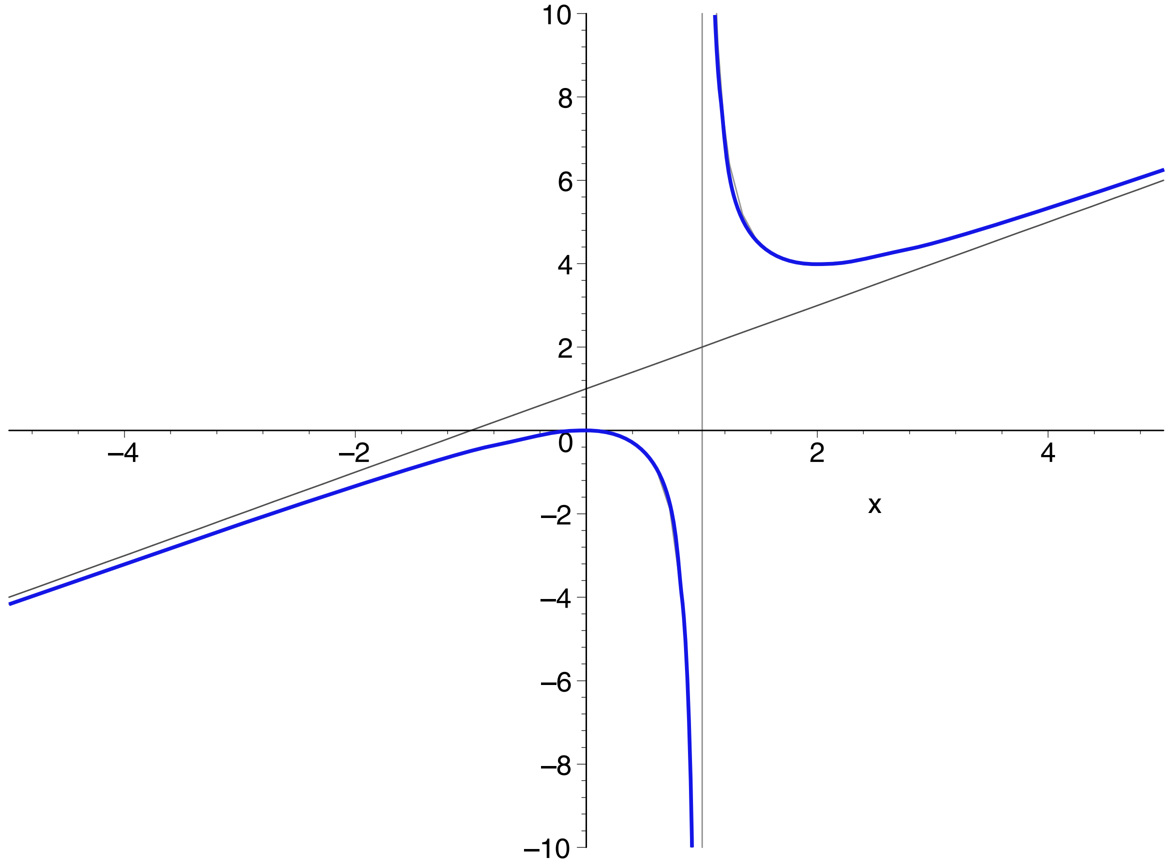
Úloha 7 (opakování z přednášky + dodělat)**.** *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

Úloha 8. *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

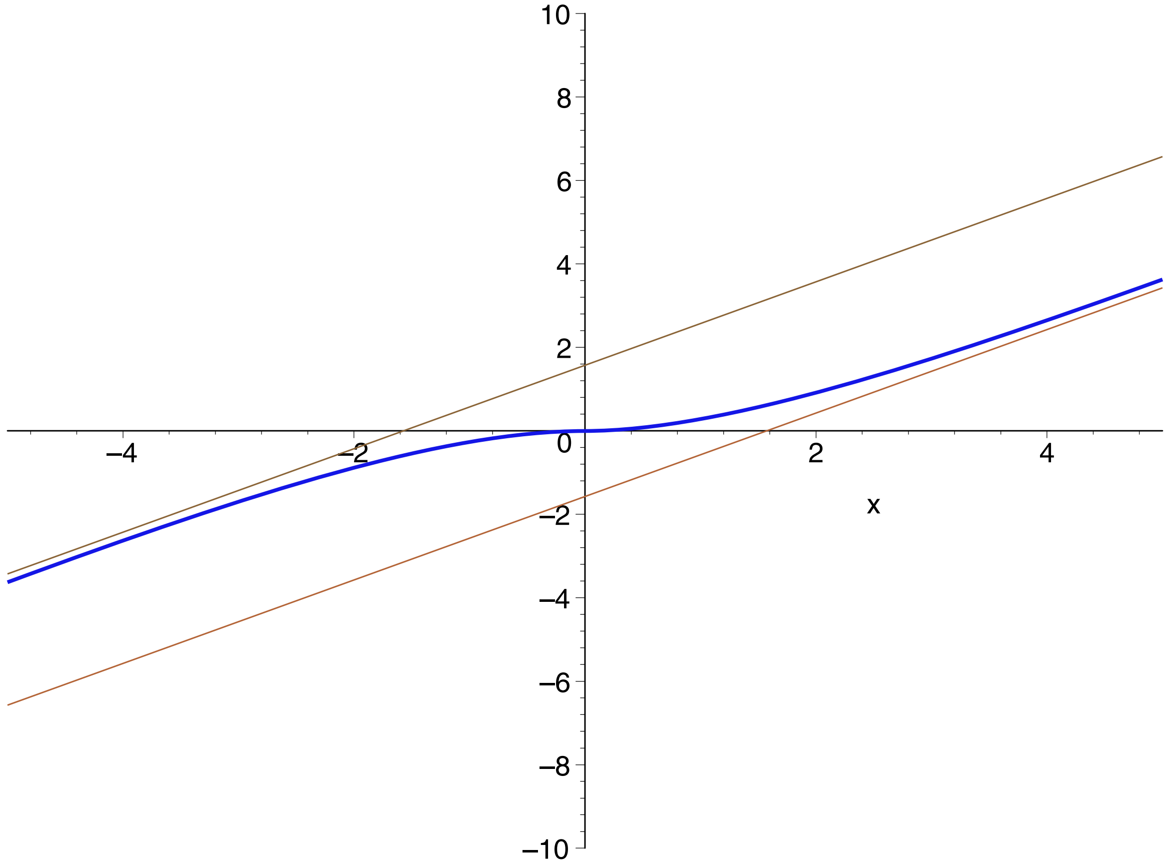
Úloha 9. *Vyšetřete průběh funkce* $f : y = x - \operatorname{arctg} x$.



Obrázek 1: Graf funkce $f : y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$. Vertikální asymptoty $x = -2$ a $x = 2$, šikmá asymptota $y = -x$ pro $x \to -\infty$ i $x \to -\infty$.



Obrázek 2: Graf funkce $f : y = \frac{x^2}{x-1}$.



Obrázek 3: Graf funkce $f : y = \operatorname{arctg} x$.