KMA/MAT1 Přednáška a cvičení č. 11,

30. listopadu 2017

[KS] Jaromír Kuben, Petra Šarmanová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. VŠB-TU Ostrava. Dostupné: `http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm`.

1 Derivace

Definice 1.1 (Derivace funkce v bodě)**.** *Nechť funkce f je definovaná na nějakém okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(x)}{h},$$

pak se nazývá derivací funkce f v bodě c. Značíme $f'(c)$.

Věta 1.2. *Má-li funkce f v bodě c derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Definice 1.3 (Derivace funkce jako funkce)**.** *Funkci, která každému bodu $x \in D(f)$ přiřazuje $f'(x)$ (pokud derivace v tomto bodě existuje), nazýváme derivací funkce f.*

1.1 Přehled derivací základních elementárních funkcí

(a) $(c)' = 0$

(b) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$

(c) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$,
speciálně $(e^x)' = e^x$

(d) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$,
$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$,
speciálně $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(e) $(\sin x)' = \cos x$

(f) $(\cos x)' = -\sin x$

(g) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(h) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

(i) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Věta 1.4 (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí)**.** *Nechť f, g jsou funkce mající derivaci v bodě c a nechť $k \in \mathbb{R}$. Potom také funkce $k \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, (je-li $g(c) \neq 0$) mají derivaci v bodě c a platí* *(a)* $(k \cdot f)'(c) = k \cdot f'(c)$

(b) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(c) $(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)$

(d) $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$

(e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$

Věta 1.5 (o derivaci složené funkce)**.** *Nechť funkce g má derivaci v bodě c a nechť funkce f má derivaci v bodě $g(c)$. Potom složená funkce $h = f \circ g$ (tj. funkce $h(x) = f(g(x))$ má derivaci v bodě c a platí*

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(c).$$

Úloha 1 (Př. 7.15)**.** *Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:*

a) $f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2,$

d) $f(x) = x^2 \cos x,$

c) $f(x) = xe^x,$

e) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+1},$

Definice 1.6. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu $\langle c, c+\varepsilon)$ $\Big((c-\varepsilon, c\rangle\Big)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right),$$

pak ji nazýváme derivací funkce f zprava (zleva) v bodě c a označujeme je $f'(c+)$ $(f'(c-))$.

Věta 1.7. *Funkce f má v bodě c derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné derivace a ty se navzájem sobě rovnají.*

Definice 1.8. *Uvažujme derivaci f' funkce f. Derivaci funkce f' budeme označovat f'' a nazývat druhou derivací funkce f. Obdobně, pro $n \geq 2$, je n-tá derivace (značíme $f^{(n)}$) derivací funkce $f^{(n-1)}$. Většinou značíme: f', f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $\ldots$.*

Příklady

Úloha 2 (Př. 7.15)**.** *Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:*

b) $f(x) = -2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$.

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7)' = -2(-\sin x) + 4e^x + \frac{1}{3} \cdot 7x^6 \\ &= 2\sin x + 4e^x + \frac{7}{3}x^6, \qquad D(f') = D(f) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Úloha 3. *Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:*

a) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$,

b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

Řešení. a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\operatorname{tg}^2 x\right)' = 2\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}, \qquad D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)' = \frac{(\sin^2 x)' \cos^2 x - \sin^2 x (\cos^2 x)'}{(\cos^2 x)^2} \\ &= \frac{(2\sin x \cos x)\cos^2 x - \sin^2 x(2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{2\sin x \cos^3 x + 2\sin^3 x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x \cos^2 x + 2\sin^3 x}{\cos^3 x} \\ &= \frac{2\sin x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^3 x} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}, \\ & D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

□

Úloha 4. *Vypočtěte všechny derivace funkcí*

a) $f : y = x^4$

b) $g : y = \sin x$. *Zde speciálně určete* $g^{(99)}(x)$.

Řešení. a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4, \\ f'(x) &= 4x^3, \\ f''(x) &= (4x^3)' = 12x^2, \\ f'''(x) &= (12x^2)' = 24x, \\ f^{(4)}(x) &= (24x)' = 24, \\ f^{(5)}(x) &= (24)' = 0 = f^{(n)},\ n \geq 5. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x, \\ g'(x) &= \cos x, \\ g''(x) &= -\sin x, \\ g'''(x) &= -\cos x, \\ g^{(4)}(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Derivace se periodicky opakují. Pro každé celé $k \geq 0$ platí:

$$g^{(4k)} = \sin x,\ g^{(4k+1)} = \cos x,\ g^{(4k+2)} = -\sin x,\ g^{(4k+3)} = -\cos x.$$

Odtud

$$g^{(99)} = g^{(96+3)} = g^{(4\cdot 24+3)} = -\cos x.$$

□

1.2 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 1.9. *Nechť funkce f a g mají derivaci v prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \qquad \left(\textit{typ} \quad \left[\frac{0}{0}\right]\right),$$

nebo

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty, \qquad \left(\textit{typ} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right).$$

Jestliže existuje

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

potom platí

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Toto platí i pro jednostranné limity.

Příklady

Limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Úloha 5 (Př. 8.15)**.** *Vypočtěte následující limity:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $a \in (0,\infty)$.

Úloha 6 (Př. 8.16)**.** *Vypočtěte následující limity:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+x-2}{3x^3-2x^2+x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2}$.

Úloha 7 (Př. 8.18, zacyklení)**.** *Vypočtěte* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Úloha 8 (Př. 8.19, nepoužitelnost LP – existence limity)**.** *Vypočtěte* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}$.

Limity typu $[\infty-\infty]$ a $[0\cdot(\pm\infty)]$

Úloha 9 (Př. 8.20)**.** *a)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.