Písemka **P1-2012-A**

Dne: 6. listopadu 2012

KMA-MT1

VZOR ....

1. Při hodu hrací kostkou značí jev A „padnutí čísla ≤ 4“, jev B „padnutí čísla ≥ 2“. Určete, co znamenají jevy $A \cup B$ a $A \cap B$. Současně určete pravděpodobnosti těchto jevů.

2. Jsou dány cifry $1, 2, 3, 4, 5$. Kolik 4-ciferných čísel, v nichž se žádná z cifer nebude opakovat, lze z těchto cifer sestavit, chceme-li získat čísla končící cifrou 1?

3. Vypočítejte inverzní matici A^{-1} k matici A a proveďte zkoušku: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & 1 & 2 & 3 \\ 20 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

---

(1) A: 1 2 3 4 5 6 : B

$A \cup B$ = „padne ≤ 4 nebo ≥ 2“, ~~tedy~~ = „padne cokoliv“

$A \cap B$ = „padne ≤ 4 a zároveň ≥ 2“ = „padne 2, 3, 4“

$P(A \cup B) = \frac{6}{6} = \underline{\underline{1}}$ $\qquad P(A \cap B) = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(2) X X X 1 $\qquad 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{24}}$

(3) $(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) = (E_3 | A^{-1})$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zk: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$

$\underline{\underline{\text{Ok}}}$

(4)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & 1 & 2 & 3 \\ 20 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 20 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)\cdot 1\cdot(-1)^{2+1}}_{1} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(6-3)+1\cdot(1-4) = 15-3 = \underline{\underline{12}}$$

(5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

2.ř. − 1.ř.
3.ř. − 2·1.ř.

3.ř. + 3·2.ř.

$\frac{1}{7}\cdot$ 3.ř.

Jediné řešení

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$\underline{x_3 = -4}$

$x_2 + 2(-4) = -4$

$\underline{x_2 = 4}$

$x_1 + 2(4) - (-4) = 10$

$x_1 + 8 + 4 = 10$

$\underline{x_1 = -2}$

Řešení $\underline{\underline{(-2, 4, -4)}}$.

2. způsob: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4+1+10 = \underline{7 \neq 0}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-(24-10)}{7} = \underline{\underline{-2}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1}{7}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\cdot 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = \frac{-1}{7}(20-48) = -\frac{1}{7}(-28) = \underline{\underline{4}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-1(8+20)}{7} = \underline{\underline{-4}}$$

Řešení $\underline{(-2, 4, -4)}$.