

1. Hod dvěma kostkami, bílou a černou:

- Jev A: na bílé kostce padne číslo  $\leq 3$ ;
- Jev B: na černé kostce padne číslo  $\geq 3$ .

$P(A) = ?$ ,  $P(B) = ?$ ,  $P(A \cap B) = ?$ ,  $P(A \cup B) = ?$ ,  $P(A/B) = ?$  a  $P(B/A) = ?$ .

2. Vypočítejte pravděpodobnost uhádnutí právě tří čísel při tažení šesti čísel ze čtyřiceti devíti.

3. Vypočítejte inverzní matice  $A^{-1}$  a  $B^{-1}$  k maticím A a B a proveďte zkoušku:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 14 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Vypočítejte determinant

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

Řešení:

(B, C) B

1)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2}, & P(B) &= \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{2}{3} \\ P(A \cap B) &= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, & P(A \cup B) &= \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \\ P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}, & P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad P = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{43!}{3!40!}}{\frac{49!}{6!43!}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!} = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 43 \cdot 41 \cdot 41}{49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 \cdot 41} = \frac{5 \cdot 43 \cdot 41}{7 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{8815}{499422} \approx 0,01765$$

$$\textcircled{3} \quad (A|E_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Singularní matice  
 $A^{-1}$  neexistuje

3) pokračování

$$(B|E_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim$$

$3 \cdot v - 3 \cdot 1 \cdot v$        $3 \cdot v - 2 \cdot v$        $-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot v$        $2 \cdot v - 3 \cdot v$   
 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v$             $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v$        $1 \cdot v - 3 \cdot v$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (E_3 | B^{-1}) \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zkouška  $B^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \Rightarrow Ok$

4) 
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 14 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \left( 4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 3 \left( 4(4-2) + 2(1-6) \right) = 3(8-10) = \underline{\underline{-6}}$$

5) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & +4 & +8 & +24 \\ 0 & +1 & +4 & +6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$2 \cdot v - 3 \cdot 1 \cdot v$        $2 \cdot v - 2 \cdot v$   
 $3 \cdot v - 1 \cdot v$        $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot v$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_2 + 2x_3 = 6$$

$$2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 10$$

$$x_1 = 10 - 12$$

$$x_1 = -2$$

Řešení  $(-2, 6, 0)$