Písemka **P1-2012-E** Dne: 9. listopadu 2012

KMA-MAT1 VZOR

1. Hod dvěma kostkami, bílou a černou:
   - Jev A: na bílé kostce padne číslo ≥ 3;
   - Jev B: na černé kostce padne číslo ≤ 3.

   $P(A)=?$, $P(B)=?$, $P(A\cap B)=?$, $P(A\cup B)=?$, $P(A/B)=?$ a $P(B/A)=?$.
2. Vypočtěte pravděpodobnost uhádnutí právě tří čísel při tažení pěti čísel ze čtyřiceti.
3. Vypočítejte inverzní matice A^{-1} a B^{-1} k maticím A a B a proveďte zkoušku:
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 13 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$
5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 6 \\ x_1+2x_2-x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

Řešení: (B, Č) B

1) A

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$P(A)=\frac{4\cdot 6}{6\cdot 6}=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{6\cdot 3}{6\cdot 6}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=\frac{4\cdot 3}{6\cdot 6}=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{36-6}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{3}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/3}{2/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

(2)
$$P=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{35}{2}}{\binom{40}{5}}=\frac{\frac{5!}{3!\,2!}\cdot\frac{35!}{2!\,33!}}{\frac{40!}{5!\,35!}}=\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}\cdot\frac{35\cdot 34\cdot 33!}{2\cdot 33!}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 35!}}=$$
$$=\frac{5\cdot 2\cdot 35\cdot 17}{13\cdot 38\cdot 37\cdot 36}=\frac{5950}{658008}\doteq 0{,}009$$

(3)
$$(A|E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\underset{2.ř+2\cdot 1.ř}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}\sim\underset{3.ř-2\cdot 2.ř}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}\sim\underset{-\frac{1}{5}\cdot 3.ř}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right)}\sim$$
$$\sim\underset{\substack{1.ř-2\cdot 3.ř \\ 2.ř-2\cdot 3.ř}}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)=\left(E_3\,|\,A^{-1}\right),\quad A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Zkouška:
$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_3\to \text{Ok}$$

③ - pokračování

$$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3&0&3&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 2&-2&0&0&0&1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}\cdot 1.ř}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1/3&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 2&-2&0&0&0&1 \end{array}\right) \underset{3.ř.-2\cdot 1.ř}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1/3&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&-2&-2&-2/3&0&1 \end{array}\right) \underset{3.ř+2\cdot 2.ř}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1/3&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&-2/3&2&1 \end{array}\right)$$

singulární $\Rightarrow B^{-1}$ neexistuje

④
$$\begin{vmatrix} 0&2&0&0&0\\ 0&0&4&0&2\\ 1&10&0&0&0\\ 10&13&1&2&3\\ 10&1&2&1&0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0&4&0&2\\ 1&0&0&0\\ 10&1&2&3\\ 10&2&1&0 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4&0&2\\ 1&2&3\\ 2&1&0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\left(4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2&3\\ 1&0 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1&2\\ 2&1 \end{vmatrix}\right) = 2(4(-3)+2\cdot(-3)) = \underline{\underline{-36}}$$

⑤
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&1\\ 1&2&1&6\\ 1&2&-1&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&6\\ 2&1&1&1\\ 1&2&-1&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&6\\ 0&+3&+1&+11\\ 0&0&+2&+4 \end{array}\right)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_2 + x_3 = 11$$
$$2x_3 = 4 \rightarrow \underline{x_3 = 2}$$

$$3x_2 + 2 = 11$$
$$3x_2 = 9$$
$$\underline{x_2 = 3}$$

$$x_1 + 2\cdot 3 + 2 = 6$$
$$x_1 + 8 = 6$$
$$\underline{x_1 = -2}$$

Řešení: $\underline{\underline{(-2, 3, 2)}}$