Písemka **P1-2014-A**

Dne: 30. října 2014

KMA-MAT1

VZOR

1. Při hodu hrací kostkou značí jev A „padnutí čísla ≥ 4“, jev B „padnutí čísla ≤ 5“. Určete, co znamenají jevy $A \cup B$ a $A \cap B$. Současně určete pravděpodobnosti těchto jevů.

2. Jsou dány cifry $1, 2, 3, 4, 5$. Kolik 3-ciferných čísel, v nichž se žádná z cifer nebude opakovat, lze z těchto cifer sestavit, chceme-li získat čísla končící cifrou 3?

3. Vypočítejte inverzní matice A^{-1} a B^{-1} k maticím A a B a proveďte zkoušku:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

4. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}.$$

---

(1) A: 1 2 3 4 5 6 $\quad$ $\boxed{B}$ $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$ 6

$A \cap B$ 1 2 3 $\boxed{4}\boxed{5}$ 6 $\qquad A \cup B$ 1 2 3 4 5 6

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{6}{6} = 1$

(2) $1,2,3,4,5 \to XX3$ bez opak.: $V_2(4) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = \cancel{20}\ 12$

(3) $(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \sim$

3.ř. − 2·2.ř. $\qquad$ 3.ř. · $\frac{1}{3}$ $\qquad$ 1.ř. − 3·3.ř., 2.ř. + 3.ř.

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) = (E_3 | A^{-1})$ Zk.: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$ OK

$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$

3.ř. + 3·1.ř. $\qquad$ 3.ř. − 2.ř.

singulární matice

A^{-1} neexistuje

4

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

5.sl. − 3.sl. 3.ř. + 2·4.ř.

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 5 = \underline{\underline{-5}}$$

1.sl. − 3.sl.
2.sl. + 3.sl.

5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

2.ř. − 1.ř.
3.ř. − 2·1.ř.

2.ř. = 3.ř.

Dvě rovnice o 4 neznámých

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Volíme $x_4 = u$

2.ř. $3x_3 - 2\cdot u = -1$

$3x_3 = 2u - 1$

$x_3 = \dfrac{2u-1}{3}$

Volíme $x_2 = v$

$$x_1 + 2\cdot v - 2\cdot\frac{2u-1}{3} + u = 3$$

$$x_1 + 2v - \frac{4}{3}u + \frac{2}{3} + u = 3$$

$$x_1 + 2v - \frac{1}{3}u + \frac{2}{3} = 3 \quad \left(3 = \frac{9}{3}\right)$$

$$x_1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}u - 2v$$

Řešení: všechny čtyřrozměrné vektory tvaru

$$\underline{\underline{\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3}u - 2v,\ v,\ \frac{2}{3}u - \frac{1}{3},\ u\right),\ u, v \in \mathbb{R}}}$$

například pro $u = v$ dostaneme

$$\left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

Písemka **P1-2014-B** Dne: 30. října 2014 **KMA-MAT1** VZOR

1. Házíme dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne součet
   a) 6,
   b) menší než 4 ?

2. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik 2-ciferných čísel, v nichž se mohou cifry opakovat, lze z těchto cifer sestavit?

3. Vypočítejte inverzní matice A^{-1} a B^{-1} k maticím A a B a proveďte zkoušku:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -4 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 1\,. \end{aligned}$$

---

(1)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) součet 6 padne 5x z 36

$$P(6) = \frac{5}{36}$$

b) Součet < 4, tedy 3 a 2 padne 3x z 36, tedy

$$P(<4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(2) XX : $V_2^*(5) = 5^2 = \underline{\underline{25}}$ Existuje 25 takových čísel

(11, 12, 13, ..., 55)

(3)
$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 16 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

2.ř. − 2·1.ř., 3.ř. − 5·1.ř. | 3.ř. − 2.ř. | 2.ř. − 2·3.ř., 3.ř.·(−1)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(E_3 \middle| \begin{array}{ccc} \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{13}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

2ř.·$(-\frac{1}{5})$ | 2.ř. ↔ 3.ř., | 2.ř. + 7·3.ř., 1.ř. + 3·3.ř. | 1.ř. − 2.ř.

$$= (E_3|A^{-1})$$

③ pokr. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6 & 7 & -3\\ -13 & -16 & 9\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix}$ Zk.: $A^{-1}\cdot A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6 & 7 & -3\\ -13 & -16 & 9\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = E_3$

Ok

$$(B, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

3.ř. +2.ř. 1.ř. − 3·3.ř.

nulový řádek ⇒ B je singulární a neexistuje k ní B^{-1}

④ $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 6 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 6 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 6 & 1\\ 5 & 3 & -2\end{vmatrix} =$$

5.sl. − 3.sl. 3.ř.+2·4.ř. 1.sl.+3.sl. 2.sl.+3.sl.

$$= 1\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 2 & 7 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -1\cdot(2\cdot 1 - 3\cdot 7) = -1(-19) = 19$$

⑤ $$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & 1 & 3\\ -2 & -4 & -2 & 2 & -4\\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -6 & 4 & 2\\ 0 & -4 & -2 & 2 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1\end{array}\right)$$

2.ř. +2·1.ř.
3.ř. − 1.ř.

2.ř.·$\frac{1}{2}$, 3.ř.·$\frac{-1}{2}$, 2.ř.⇔3.ř.

Navíc
1.ř. −2.ř.

$$\begin{aligned}x_1 \quad - 3x_3 + 2x_4 &= 2\\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1\\ -3x_3 + 2x_4 &= 1\end{aligned}$$

1.R $\boxed{x_4 = r}$

$-3x_3 + 2r = 1$

$-3x_3 = 1 - 2r$

$\boxed{x_3 = \frac{2r-1}{3}} \boxed{= \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}}$

2.R $2x_2 + \left(\frac{2}{3}r - \frac{1}{3}\right) - r = 1$

$2x_2 - \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}$

$2x_2 = \frac{1}{3}r + \frac{4}{3}$

$\boxed{x_2 = \frac{1}{6}r + \frac{2}{3}}$

3.R $x_1 - 3\left(\frac{2}{3}r - \frac{1}{3}\right) + 2\cdot r = 2$

$x_1 - 2r + 1 + 2r = 2$

$\boxed{x_1 = 1}$

Řešením je každý vektor tvaru

$\left(1, \frac{1}{6}r + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}, r\right)$, kde $r \in \mathbb{R}$, tedy

např. pro $r = 0$ dostaneme $\left(1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$

Písemka **P1-2014-C**	Dne: 30. října 2014 KMA-MT1	VZOR

1. Hod dvěma kostkami, bílou a černou:
   - Jev A: na bílé kostce padne číslo ≤ 2;
   - Jev B: na černé kostce padne číslo ≥ 4.

   $P(A) =?$, $P(B) =?$, $P(A \cap B) =?$, $P(A \cup B) =?$.

2. Jsou dány cifry $1, 2, 3, 4, 5$. Kolik sudých 4-ciferných čísel, v nichž se nemohou cifry opakovat, lze z těchto cifer sestavit?

3. Vypočítejte inverzní matice A^{-1} a B^{-1} k maticím A a B a proveďte zkoušku:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Vyřešte soustavu lineárních rovnic
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}.$$

Řešení: (Bíla, Černá)

1)

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	A
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	B
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2 \cdot 6 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = $$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\left.\begin{matrix} xxx2 \\ xxx4 \end{matrix}\right\} 2 \cdot V_3(4) =$
$$= 2 \cdot \frac{4!}{(4-3)!} = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$$

3A)
$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{1.ř. \leftrightarrow 2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{3.ř. - 2 \cdot 2.ř.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{1.ř. - 3.ř.,\ 3.ř. \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \underset{2.ř. + 3.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) = (E_3|A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zk.: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ok

3B)
$$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{1.ř. \leftrightarrow 2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{3.ř. + 1.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{3.ř. + 2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

singulární matice $\Rightarrow$
$\Rightarrow B^{-1}$ neexistuje

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$

5. sl. − 3. sl.

3. ř. + 2 · 4. ř.

1. sl. + 3. sl.
2. sl. + 3. sl.

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(4+6) = \underline{\underline{-10}}$

(5)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$

2. ř. − 2 · 1. ř.
3. ř. − 1. ř.

1. ř. + 3. ř.
2. ř. − 4 · 3. ř.
3. ř. · (−1)

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1B $\boxed{x_4 = r}$

$x_2 + r = 0$

$\boxed{x_2 = -r}$

2R $\boxed{x_3 = s}$

$x_1 + s = 1$

$\boxed{x_1 = 1 - s}$

Nekonečně mnoho řešení tvaru $(1-s, -r, s, r)$, $r, s \in \mathbb{R}$

(například pro $r = s = 0$: $(1, 0, 0, 0)$)