Písemka **P2-2011-C** Dne: 14. prosince 2011

KMA-MT1 VZOR .....

4 1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+2n}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}$.

4 2. Napište vždy jednu základní elementární funkci s danou vlastností:

(a) je sudá: x^2

(b) je neohraničená: x^2

(c) její $H(f)=\mathbb{R}^+$: e^x

(d) $f(0)=0$: $\sin x$

3 3. Vypočtěte, případně vyřešte rovnici:

(a) $\log_2 8$, $=3$

(b) $\log_3 \dfrac{1}{9}$, $=-2$

(c) $\log_a \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$. $a=3$

5 4. Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

(a) $y=x^{-1}$, $y=(x-1)^{-1}$,

(b) $y=x^3$, $y=x^3-1$,

(c) $y=3^x$, $y=3^{-x}$, $y=-3^x$.

$x\in\langle -1,1\rangle \wedge (1+x^2\geq 0) = x\in\langle -1,1\rangle \wedge x\in\mathbb{R} = x\in\langle -1;1\rangle$

6 5. Určete definiční obor funkce $f: y=\arcsin x - x\sqrt{1+x^2}$.

5 6. Určete $D(f)$ a základní periodu funkce a načrtněte graf funkce $f: y=1+\sin(3x-\pi)$.

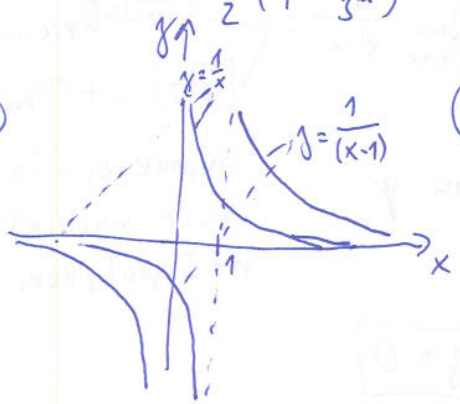
8 7. Pro funkci $f: y=4x^3+9x^2-12x+12$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

5 8. Najděte všechny asymptoty funkce $f: y=\dfrac{2x^3}{x^2-2}$.

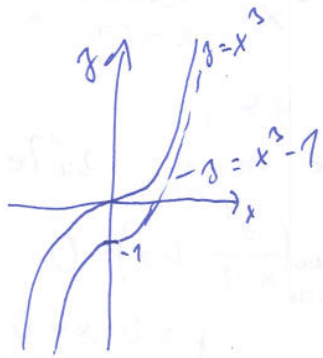
(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}$ je součet prvních n členů geometr. posl.: $a_1=1$, $q=\frac{1}{3} \Rightarrow s_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$, dosadíme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+2n}{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)} = \left[\frac{+\infty}{\frac{3}{2}(1-0)} = \frac{+\infty}{\frac{3}{2}}\right] = +\infty$$

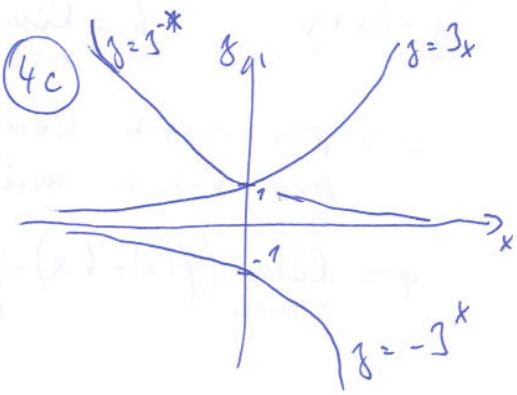
(4a)



(4b)



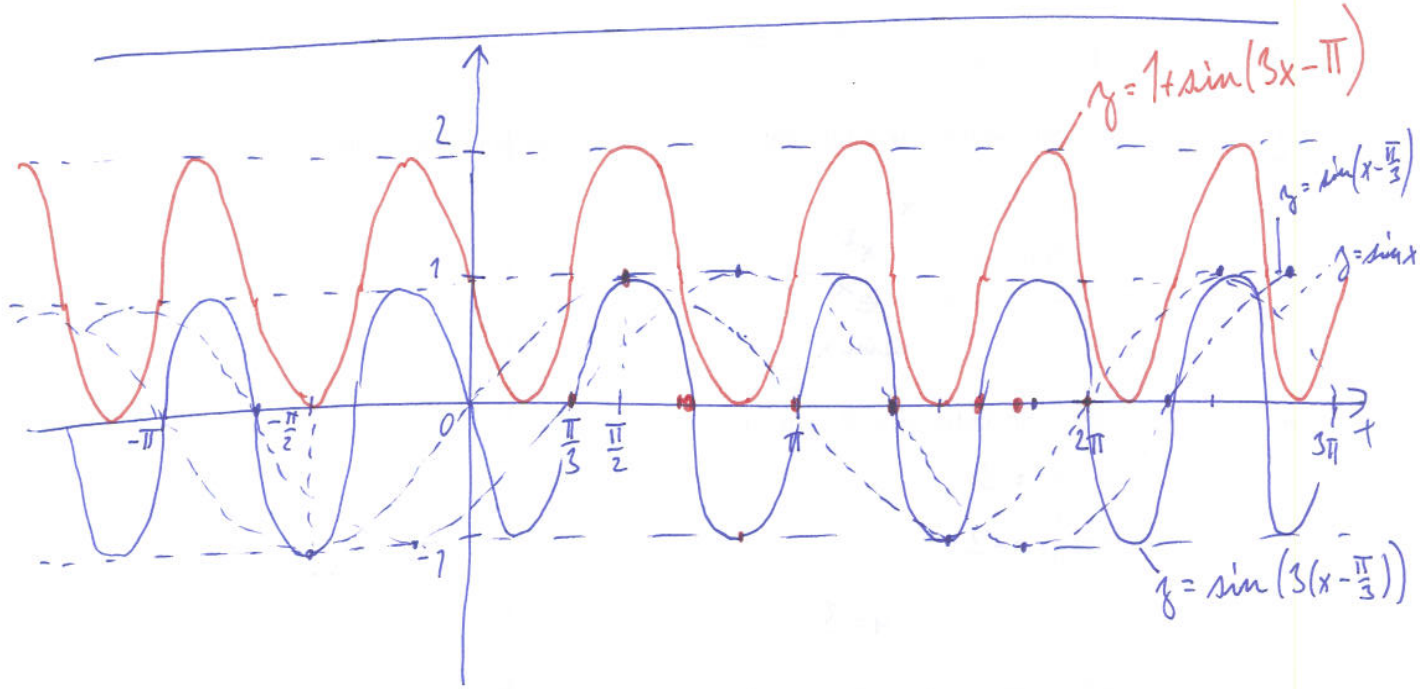
(4c)



(6) $D(f)=\mathbb{R}$ $\quad f: y=1+\sin(3x-\pi) = 1+\sin\left(3\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

perioda, nulový bod $x_0=\frac{\pi}{3}$

perioda fce sin $-\frac{2\pi}{3}$



(7) $f: y=4x^3+9x^2-12x+1$ $\quad D(f)=\mathbb{R}$

$y'=12x^2+18x-12$ $\quad D(f')=\mathbb{R}$ $\quad y'=0,\ 12x^2+18x-12=0$

$6(2x^2+3x-2)=0$

$D=3^2-4\cdot2\cdot(-2)=25$

$x_{1/2}=\frac{-3\pm5}{4}=\begin{cases}-2\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

		-2		$\frac{1}{2}$	
y	↗	L.Max	↘	L.Min	↗
y'	+	0	−	0	+

$y''=24x+18=6(4x+3)$, $D(f'')=\mathbb{R}$, $\quad y''=0,\ 4x+3=0$

$x=-\frac{3}{4}$

		$-\frac{3}{4}$	
y''	∩	inf. 0	∪
y'	−		+

inf. bod $\left[-\frac{3}{4}, f\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

(8) as.: $f: y=\frac{e^x}{x-1}$, $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{e}{0^+}\right]=+\infty$ $\Rightarrow$ vert. as. $\boxed{x=1}$

as. se směrnicí $y=kx+q$: $\quad k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{e^x}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{x^2-x}=$

$\left[\frac{0}{\infty}\right]=0$ pro $x\to-\infty$

$\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=+\infty$ pro $x\to+\infty$

exponenciála roste rychleji než polynom

$\Rightarrow$ pro $x\to+\infty$ nemá as.,

pro $x\to-\infty$ může mít, záleží na q

$q=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x-1}-0\cdot x\right)=0$

$y=0\cdot x+0$ $\quad \boxed{y=0}$

Písemka **P2-2011-B** Dne: 13. prosince 2011

KMA-MAT1 VZOR

4 1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+2n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}$. $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n}{1\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}} = \left[\dfrac{\infty}{2}\right] = \underline{\underline{\infty}}$

4 2. Napište vždy jednu základní elementární funkci s danou vlastností:

(a) je lichá: x^3

(b) je ohraničená: $\sin x$

(c) její $D(f) = \mathbb{R}^+$: $\ln x$

(d) je ryze monotonní: e^x

3 3. Vypočtěte, případně vyřešte rovnici:

(a) $\log_3 x = 3$, $x = 27$

(b) $\log_b 16 = 2$, $b = 4$

(c) $\log_5 x = -2$. $x = 1/25$

5 4. Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

(a) $y = \ln x$, $y = \ln(x-1)$, $y = -\ln x$,

(b) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$,

(c) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 2^{-x}+1$.

5 5. Určete definiční obor funkce $f : y = \arccos\frac{1-2x}{4}$.

$D(\arccos) = \langle -1;1\rangle \Rightarrow \frac{1-2x}{4} \in \langle -1,1\rangle$

$-1 \le \frac{1-2x}{4} \le 1 \Rightarrow -4 \le 1-2x \le 4 \Rightarrow -5 \le -2x \le 3$

$\frac{5}{2} \ge x \ge -\frac{3}{2}$

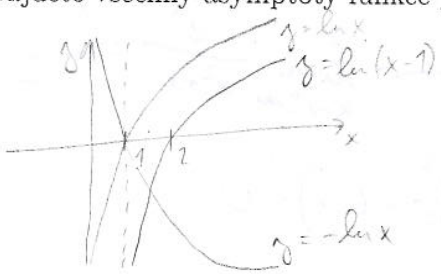
$D: x \in \langle -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\rangle$

5 6. Určete $D(f)$ a základní periodu funkce a načrtněte graf funkce $f : y = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)$.

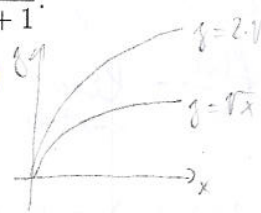
8 7. Pro funkci $f : y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

6 8. Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{-e^x}{x+1}$.

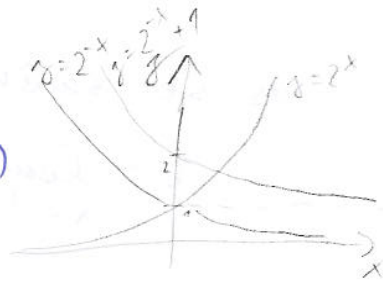
4a)



4b)



4c)

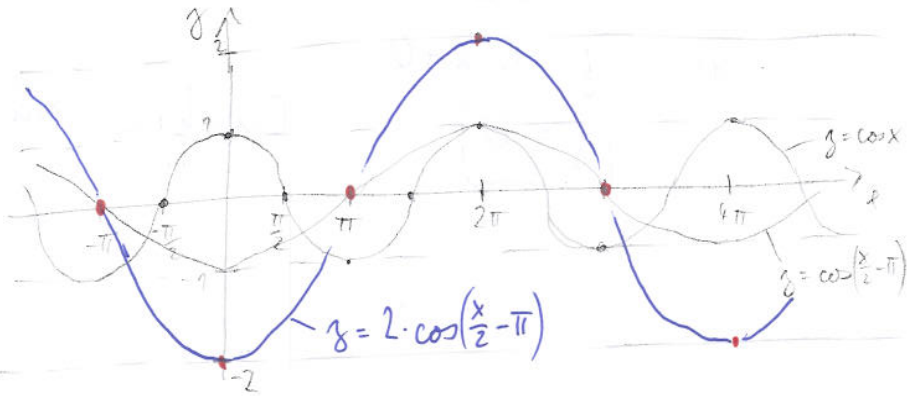


6) $\frac{x}{2} - \pi = 0$, $\frac{x}{2} = \pi$, $x = 2\pi$

$\frac{(x+p)}{2} - \pi = \left(\frac{x}{2} - \pi\right) + 2\pi$

$\frac{p}{2} = 2\pi$

$p = 4\pi$ – perioda



(7) $f: y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x - 8 \quad D(f) = \mathbb{R}$

$y' = \frac{4}{3}\cdot 3\cdot x^2 - 3\cdot 2\cdot x - 4 \qquad D(f') = \mathbb{R}$

$y' = 4x^2 - 6x - 4 = 2(2x^2 - 3x - 2)$

$y' = 0, \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$

y	↗	L.Max	↘	L.Min	↗
y'	+	0	−	0	+
		$-\frac{1}{2}$		2	

$y'' = 2\cdot(4x - 3) \qquad D(f'') = \mathbb{R}$

$y'' = 0, \quad 4x - 3 = 0, \quad x = \frac{3}{4}$

y	∩	inf?.	∪
y''	−	0	+
		$\frac{3}{4}$	

inflexní bod grafu ~~[0,~~

$\left[\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right] = \left[\frac{3}{4}, -12{,}125\right]$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{64} - 3\,\frac{9}{16} - 4\,\frac{3}{4} - 8 = \frac{9}{16} - \frac{27}{16} - 11 = -\frac{18}{16} - 11 =$

$= -12\frac{1}{8}$

(8) $f: y = \frac{-e^x}{x+1}, \quad D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

vert. as.: $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-e^x}{x+1} = \left[\frac{-\frac{1}{e} < 0}{0^+}\right] = -\infty \Rightarrow$ vert. as. $\boxed{x = -1}$

as. se směrnicí: $y = kx + q$

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{-e^x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-e^x}{x^2 + x} = \begin{cases} -\infty, \text{ pro } x \to +\infty \\ \text{tedy neexistuje as. pro } x \to +\infty \\ 0, \text{ pro } x \to -\infty \end{cases}$

$q = \lim\limits_{x \to \cancel{+\infty}\, -\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{-\infty} \left(\frac{-e^x}{x+1} - 0\cdot x\right) = 0$

as. $y = 0\cdot x + 0$

$\boxed{y = 0}$

Funkce má asymptoty $x = -1$ a $y = 0$.