Zisk ..... b. z 56 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2015-C**

Dne: 17. prosince 2015

KMA-MAT1

VZOR
.....
(čitelně jméno a studijní skupina)

1. (*6 bodů*) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n-1}{n-n^2}$.

2. (*6 b.*) Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

   (a) $y=\cos x$, $y=\cos(x-\pi)$, $y=\dfrac{1}{2}\cos x$,

   (b) $y=x^2$, $y=(x+2)^2$, $y=-x^2+2$.

3. (*6 b.*) Určete $D(f)$, základní periodu a načrtněte graf funkce $f: y=1-\cos(2x)$.

4. (*6 b.*) Určete definiční obor funkce $f: y=\dfrac{5\cos 3x}{\arccos(-4x+4)}$.

5. (*8 b.*) Derivujte funkci $f: y=\cos(\sin(2^x))+\sqrt{x^2-1}$
   a určete $D(f)$ a $D(f')$.

6. (*6 b.*) Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$.

7. (*12 b.*) Pro funkci $f: y=\dfrac{x^2}{x-3}$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

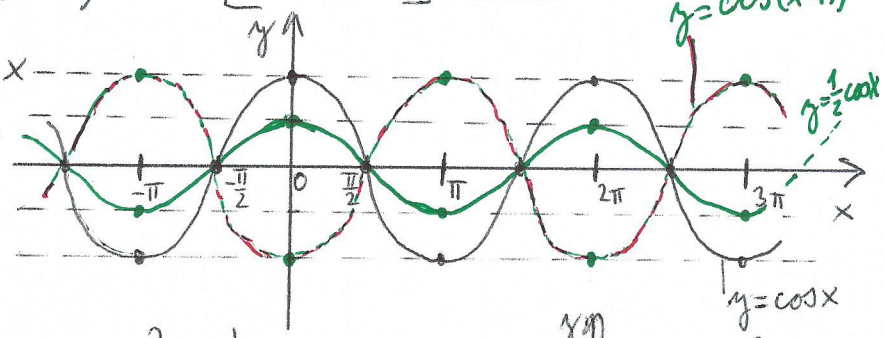
8. (*6 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f: y=\dfrac{x^2}{x-3}$.

① $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n-1}{n-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \left[\dfrac{1-0-0}{0-1}\right] = \underline{\underline{-1}}$

② a) $y=\cos x$, $\cos(x-\pi)$, $\frac{1}{2}\cos x$

posun o $\pi$ doprava, tedy vlastně $-\cos\pi$

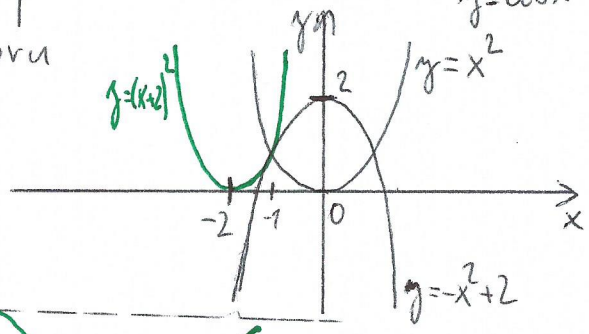
poloviční amplituda




b) $y=x^2$, $y=(x+2)^2$, $y=-x^2+2$ — posun o 2 nahoru

posun o 2 doleva

převrácení

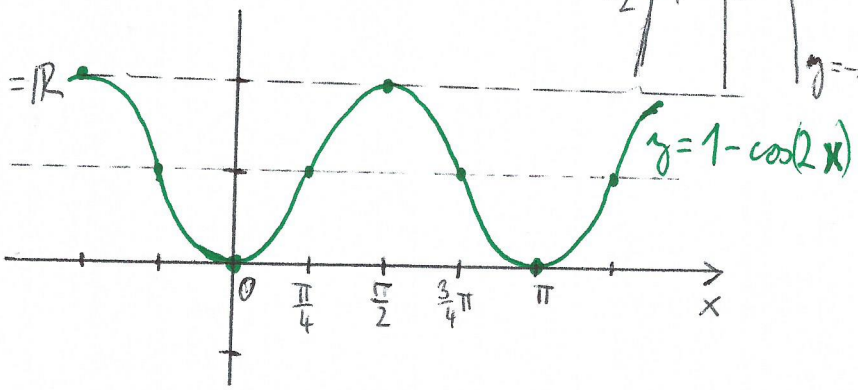



③ $f: 1-\cos(2x)$ $\quad D(f)=\mathbb{R}$

posun o 1 nahoru

převrácení

poloviční perioda $2\pi \to \pi$




④ $f: y=\dfrac{5\cdot\cos 3x}{\arccos(-4x+4)}$, $D(f)$: $\underline{D(5\cdot\cos 3x)=\mathbb{R}}$

$\underline{D(-4x+4)=\mathbb{R}}$, arccos je def. na $\langle -1,1\rangle$, tedy $-1\le -4x+4\le 1 \quad |-4$

$-5\le -4x\le -3 \quad |:(-4)$

$\frac{5}{4}\ge x\ge \frac{3}{4}$ 1. omezení

Jmenovatel: $\arccos(-4x+4)\ne 0$

$-4x+4\ne 1$

$-4x\ne -3$

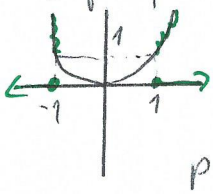
$x\ne \frac{3}{4}$ 2. omezení

Dohromady

$$\underline{\underline{D(f)=\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right\rangle}}$$

⑤ $\left[\cos(\sin(2^x))+\sqrt{x^2-1}\right]' = -\sin(\sin(2^x))\cdot\cos(2^x)\cdot 2^x\cdot\ln 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x$

$D(f)$: fce $\cos(\sin(2^x))$ je def. všude, $\sqrt{x^2-1}$ pouze pro $x^2-1\ge 0$, $x^2\ge 1$, tedy




$\underline{\underline{D(f)=(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)}}$ ; $D(f')$: $\sqrt{x^2-1}$ je ve jmenovateli, a tak $\sqrt{x^2-1}\ne 0$, $x^2-1\ne 0$, $x^2\ne 1$, $x\ne\pm 1$, společně s předchozími podmínkami $\underline{\underline{D(f')=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}}$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x} = \left[\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\cdot\ln 2-0}{1} = \left[1\cdot\ln 2\right] = \underline{\underline{\ln 2}}$

(7) $f: y = \dfrac{x^2}{x-3}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}, \quad D(f') = D(f)$$

a) Monotonnost a lokální extrémy (pomocí 1. derivace)

$f'(x)$ je spojitá na $(-\infty, 3)$ a $(3, +\infty)$

$f'(x) = 0$, $x(x-6) = 0$ $\quad x = 0$, $x = 6$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | ↗ | L.Max | ↘ | | ↘ | L.Min | ↗ | |
| $f'$ | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $x$ | − | 0 | + | 3 | + | 6 | + | $x$ |
| $x-6$ | − | | − | | − | | + | |
| $(x-3)^2$ | + | | + | | + | | + | |

rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 6, +\infty)$ | L.Min pro $x = 6$, $f(6) = \frac{36}{6-3} = 12$

klesající na $\langle 0, 3)$ a $(3, 6\rangle$ | L.Max pro $x = 0$, $f(0) = 0$

b) Konvexnost, konkávnost, inflexe (pomocí 2. derivace)

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}} - (x^2-6x) \cdot 2 \cancel{(x-3)} \cdot 1}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^2 - 6x - 6x + 18 - 2x^2 + 12x}{(x-3)^3} = \frac{18}{(x-3)^3}, \cancel{D(f'')}$$

$D(f'') = D(f)$

$f''$ spojitá a nenulová na $(-\infty, 3)$ a $(3, +\infty)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | ∩ | | ∪ | |
| $f''$ | − | | + | |
| $18$ | + | 3 | + | $x$ |
| $(x-3)^3$ | − | | + | |

konvexní na $(3, +\infty)$ | přechod (bod $x = 3$) nepatří do $D(f)$, a tak

konkávní na $(-\infty, 3)$ | je fce bez inflexe

(8) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, 3 je kandidátem na svislou as., ověříme pomocí limity: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2}{x-3} = \left[\dfrac{9}{0^-}\right] = -\infty \Rightarrow$ as. $\underline{\underline{x = 3}}$

as. pro $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$): $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x-3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}(1 - \frac{3}{x})} = \left[\dfrac{1}{1-0}\right] = 1$ (1)

$q = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-3} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{x-3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x}(3)}{\cancel{x}(1 - \frac{3}{x})} = 3$ (3)

Pro oba směry jedna as.: $\underline{\underline{y = x + 3}}$