Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-E**

4. 1. 2018

KMA-MAT1

„VZOR"
(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 b.*) Určete $D(f)$, základní periodu a načrtněte graf funkce $f : y = 1 + \cos(2x - \pi)$.

2. (*5 b.*) Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x}$.

3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f : y = \sqrt{4x} + \cos\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.

4. (*5 b.*) Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

5. (*10 b.*) Pro funkci $f : y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ určete $D(f)$, $D(f')$, maximální intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

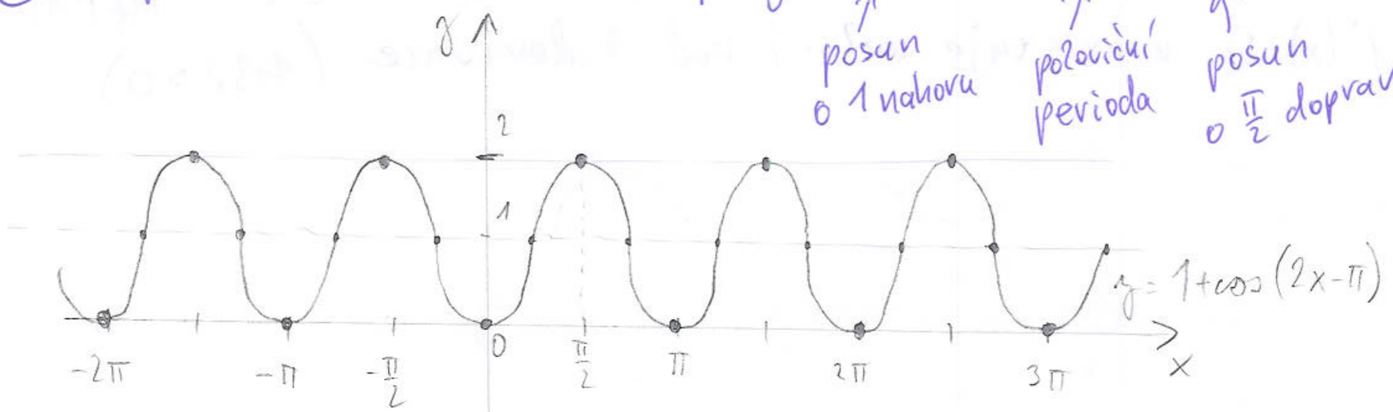
---

(1) $D(f) = \mathbb{R}$, $p_0 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$, $f : y = 1 + \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

posun o 1 nahoru

poloviční perioda

posun o $\frac{\pi}{2}$ doprava



(2) $f : \dfrac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x}$, $\ln:\ x^2 - 2x + 1 > 0,\ (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$,

$\frac{\cdot}{\cdot}$; $x \neq 0$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

(3) $D(f)$: $\sqrt{\cdot}$: $4x \geq 0$, $x \geq 0$; $\frac{\cdot}{\cdot}$: $2 - x \neq 0$, $x \neq 2$ $\Big\}$ $D(f) = \langle 0; 2) \cup (2; +\infty)$

$$f'(x) = \left[(4x)^{\frac{1}{2}} + \cos\frac{2+x}{2-x}\right]' = \frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x)' - \left(\sin\frac{2+x}{2-x}\right)\left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x}} \cdot 4 -$$

$$-\left(\sin\frac{2+x}{2-x}\right)\frac{1\cdot(2-x) - (2+x)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{\sqrt{4x}} - \left(\sin\frac{2+x}{2-x}\right) \cdot \frac{4}{(2-x)^2},\ D(f') = D(f) \setminus \{0\} = (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0\ \text{nz}}\right] = \cancel{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \left[1 \cdot \frac{1}{1}\right] = \underline{\underline{1}}$

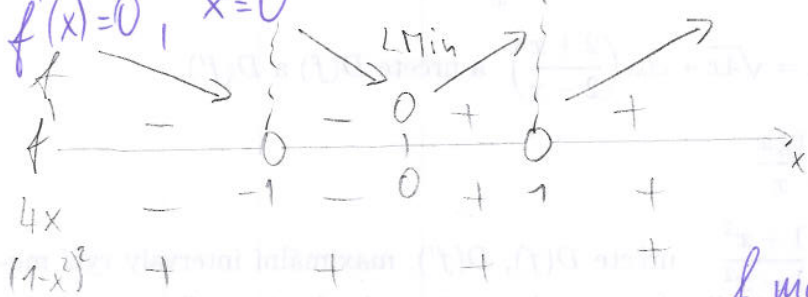
nebo $\overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \left[\frac{1}{1}\right] = \underline{\underline{1}}$

⑤ $f: y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, [spojitá na $(-\infty,-1)$, $(-1;1)$ a $(1;+\infty)$]

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}, \quad D(f') = D(f)$$

(spojitá na stejných intervalech)

$f'(x) = 0$, $x = 0$



f je klesající na $(-\infty;-1)$ a $(-1;0)$

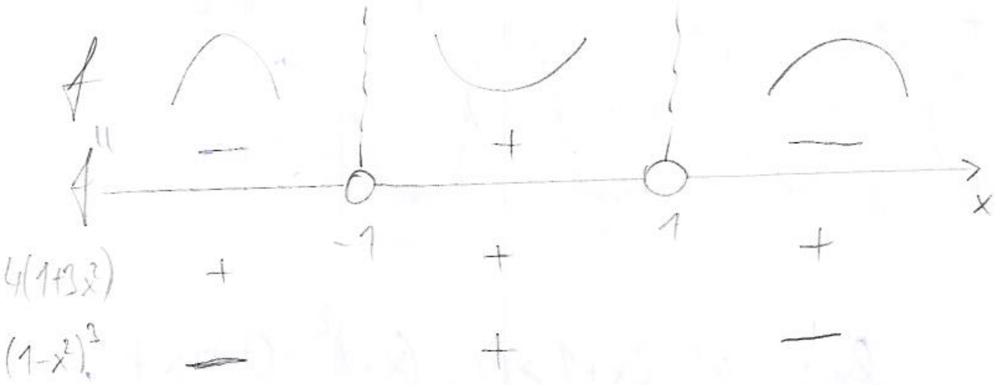
rostoucí na $(0,1)$ a $(1,+\infty)$

f má LMin v 0 o hodnotě $f(0) = 1$

$$f''(x) = \frac{4(1-x^2)^{\cancel{2}} - 4x \cdot 2 \cdot \cancel{(1-x^2)}(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3},$$

$D(f'') = D(f)$

$f''(x) = 0$, neexistuje nulový bod 2. derivace $(1+3x^2 > 0)$



f je konvexní na $(-1, 1)$

konkávní na $(-\infty;-1)$ a $(1;+\infty)$

nemá inflexe