Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-F**

4. 1. 2018

KMA-MAT1

„VZOR"

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 b.*) Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku, celkem tedy dva obrázky):

   (a) $y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 2\operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x,$

   (b) $y = \ln x, \quad y = \ln(-x), \quad y = \log_2 x.$

2. (*5 b.*) Určete $D(f)$, základní periodu a načrtněte graf funkce $\quad f : y = \frac{1}{2}\cos(2x).$

3. (*5 b.*) Vypočtěte limitu $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$

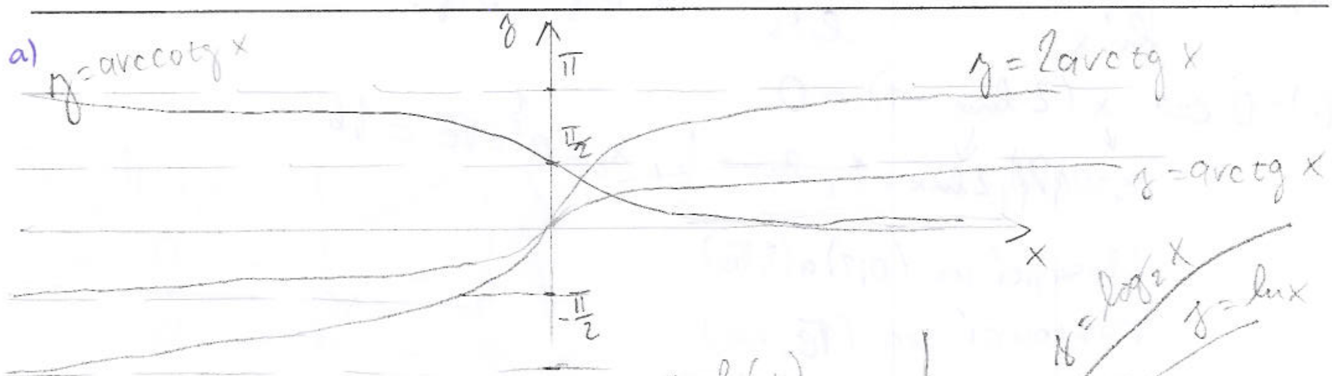
4. (*5 b.*) Pro funkci $\quad f : y = \dfrac{x^2}{\ln x} \quad$ určete $D(f)$, $D(f')$, maximální intervaly ryzí monotonnosti a lokální extrémy.

5. (*5 b.*) Pro funkci $\quad f : y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3 \quad$ určete $D(f)$, $D(f')$, $D(f'')$, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

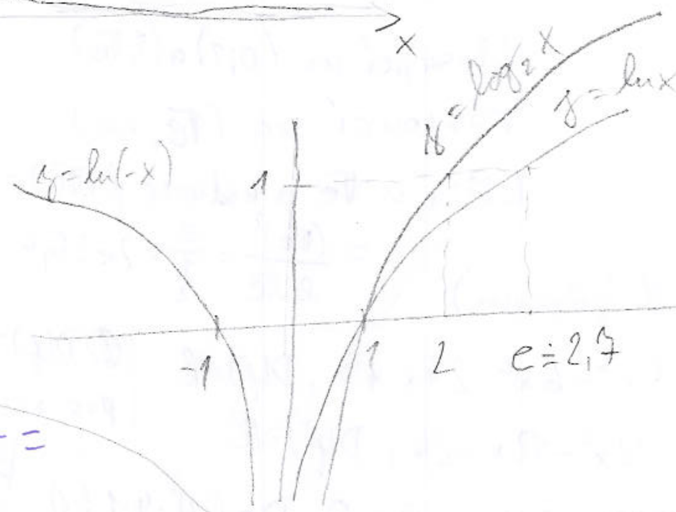
6. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $\quad f : y = e^{-x}.$

---

1 a)



b)



2 1. způsob

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} \overset{=\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)\cancel{\sin x}}{\sin^2 x \cdot \cancel{\sin x}} \overset{=\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\,(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1-\cos x}^{\,1}}{\cos x\,\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)} = \left[\frac{1}{1\,(1+1)}\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

③ 2. způsob

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=}$$

$\cos^{-2} x$

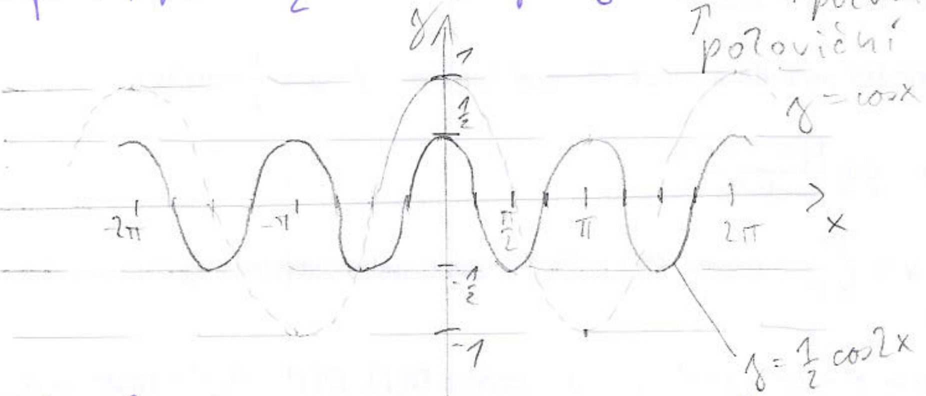
$$\overset{LP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot\cos^{-3}x\cdot(-\sin x) - (-\sin x)}{3\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x + 3\sin^2 x\cdot(-\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x} + \sin x}{6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^3 x} + 1}{6\cos^2 x - 3\sin^2 x} = \left[\frac{\frac{2}{1}+1}{6\cdot 1 - 3\cdot 0}\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

② $D(f) = \mathbb{R}$, $p_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $f: y = \frac{1}{2}\cos 2x$

polovičná perioda

poloviční amplituda



④ $D(f)$: $\ln: x > 0$, $\div: \ln x \neq 0 \to x \neq 1$ $\}$ $D(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\ln x - x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}, \quad D(f') = D(f)$$

$f'(x) = 0 \iff x(2\ln x - 1) = 0$

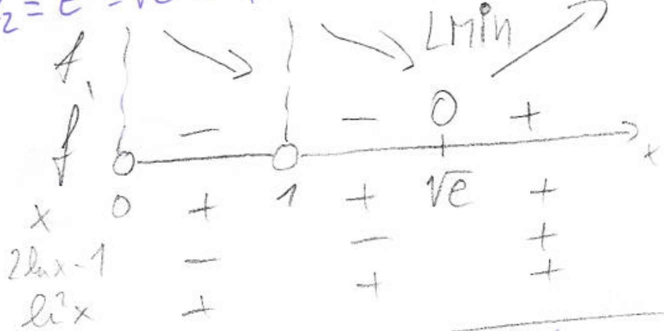
$x_1 = 0 \notin D(f)$, $2\ln x = 1$, $\ln x = \frac{1}{2}$, $x_2 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \doteq 1{,}6$

klesající na $(0;1)$ a $(1;\sqrt{e})$

rostoucí na $(\sqrt{e};+\infty)$

LMin v $\sqrt{e}$ o hodnotě $f(\sqrt{e}) =$

$$= \frac{(\sqrt{e})^2}{\ln\sqrt{e}} = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e \doteq 5{,}4$$



⑤ $D(f) = \mathbb{R}$ (polynom)

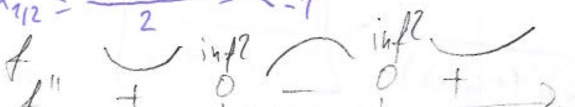
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7$, $D(f') = \mathbb{R}$

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$, $D(f'') = \mathbb{R}$

$f''(x) = 0$, $12(x^2 - x - 2) = 0$, $D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)$

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$



konvexní: $(-\infty;-1)$ a $(2;+\infty)$

konkávní: $(-1;2)$, infl. b. $[-1; \cancel{-23}]$ -19, $[2; \cancel{-5}]$ -37

⑥ $D(f) = \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R} \Rightarrow$ nemá svislé as.

pro $x \to -\infty$: $k = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \cancel{\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x\cdot e^{x}} = \left[\frac{1}{-\infty}\right]}$

$\left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = \left[\frac{-\infty}{1}\right] = -\infty$ v tomto směru as. neex.

pro $x \to +\infty$: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$

$q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

pro $x \to \infty$ má graf fce $f: y = e^{-x}$

asymptotu $\underline{y = 0}$ (tedy osu x).