①

Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-G**

10. 1. 2018

KMA-MAT1

„VZOR“

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 bodů*) Vypočtěte $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{3n^2-6n+2}$.

2. (*5 b.*) Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku, celkem tedy dva obrázky):

   (a) $y=x^2,\quad y=(x-1)^2,\quad y=1-(x+1)^2$,

   (b) $y=\cos x,\quad y=\cos(-x),\quad y=-\cos x$.

3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f: y=\cos(\sin(3x))+x\log_3 x$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.

4. (*10 b.*) Pro funkci $f: y=\dfrac{e^x}{x-1}$ určete $D(f)$, $D(f')$, maximální intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

5. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f: y=\dfrac{e^x}{x-1}$.

---

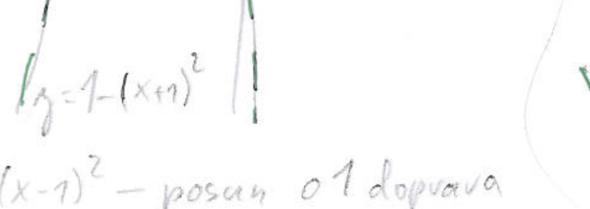
① $2+4+6+\cdots+2n$ = součet prvních n sudých čísel =

$= \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}(2+2n) = n+n^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{3n^2-6n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{3n^2-6n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

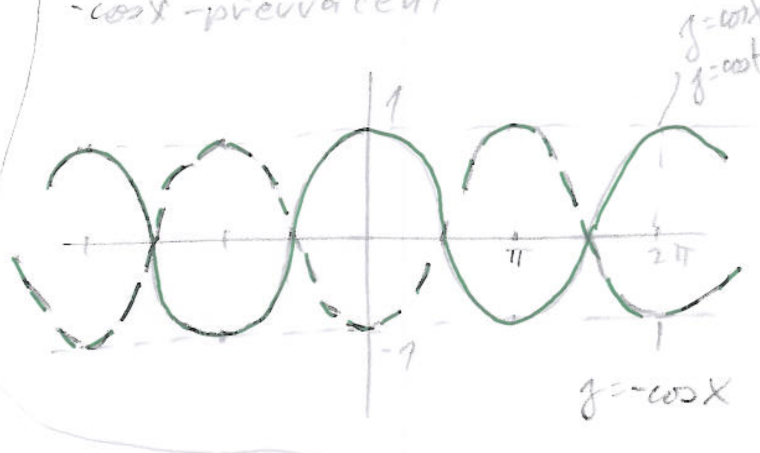
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(3-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2})} = \left[\frac{1+0}{3-0+0}\right] = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

② a)



b) cos x, cos(-x) = cos x (sudá fce)

-cos x - převrácení



$y=(x-1)^2$ — posun o 1 doprava

$y = 1 - (x+1)^2$ posun o 1 doleva

převrácení

+1 posun o 1 nahoru

2

Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-G**

10. 1. 2018

KMA-MAT1

VZOR

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 bodů*) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{3n^2-6n+2}$.
2. (*5 b.*) Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku, celkem tedy dva obrázky):
   (a) $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = 1-(x+1)^2$,
   (b) $y = \cos x$, $y = \cos(-x)$, $y = -\cos x$.
3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f : y = \cos(\sin(3x)) + x\log_3 x$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.
4. (*10 b.*) Pro funkci $f : y = \dfrac{e^x}{x-1}$ určete $D(f)$, $D(f')$, maximální intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.
5. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{e^x}{x-1}$.

---

3 $f: y = \cos(\sin(3x)) + x\cdot\log_3 x$, $D(f) = (0,+\infty)$ (log)

$f': y = -\sin(\sin(3x))\cdot[\sin 3x]' + 1\cdot\log_3 x + x\cdot\dfrac{1}{x\ln 3} =$

$= -\sin(\sin 3x)\cdot[(\cos 3x)\cdot 3] + \log_3 x + \dfrac{1}{\ln 3} =$

$= -3\cdot\sin(\sin 3x)\cdot\cos 3x + \log_3 x + \dfrac{1}{\ln 3}$,

$D(f') = D(f)$

Derivace součtu, složené fce a součinu.

Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

③

Písemka **P2-2017-G**

10. 1. 2018

KMA-MAT1

VZOR 4

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 bodů*) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{3n^2-6n+2}$.

2. (*5 b.*) Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku, celkem tedy dva obrázky):

   (a) $y = x^2, \quad y = (x-1)^2, \quad y = 1-(x+1)^2$,

   (b) $y = \cos x, \quad y = \cos(-x), \quad y = -\cos x$.

3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f : y = \cos(\sin(3x)) + x\log_3 x$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.

4. (*10 b.*) Pro funkci $f : y = \dfrac{e^x}{x-1}$ určete $D(f)$, $D(f')$, maximální intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

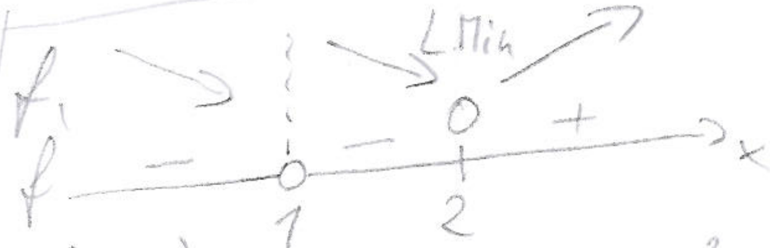
5. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{e^x}{x-1}$.

---

④ $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, spojitá na $(-\infty;1)$ a $(1,+\infty)$,

$f'(x) = \dfrac{e^x(x-1) - e^x\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $D(f') = D(f)$ spojitá tamtéž

$f'(x) = 0 \iff e^x(x-2) = 0$
$e^x \to \emptyset$, $\quad (x-2) \to x = 2$



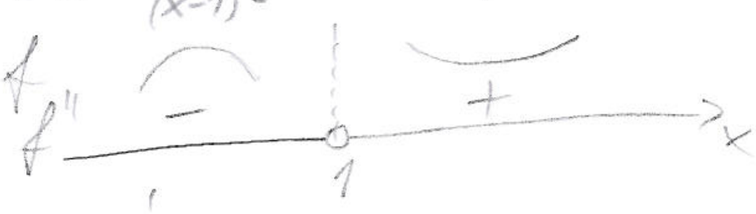
f klesá na $(-\infty,1)$ a $(1;2)$

roste na $(2;+\infty)$, má L Min ve 2 o hodnotě $f(2) = \frac{e^2}{1} = e^2$

$f''(x) = \dfrac{[e^x(x-2)+e^x\cdot 1](x-1)^{\cancel{2}} - e^x(x-2)\cdot 2\cancel{(x-1)}\cdot 1}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{e^x[(x-2)(x-1)+1(x-1)-2(x-2)]}{(x-1)^3} =$

$= \dfrac{e^x[x^2-3x+2+x-1-2x+4]}{(x-1)^3} = \dfrac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$, $D(f'') = D(f)$, spoj. též

nulové body nemá $(D<0)$



konvexní na $(1,+\infty)$,

konkávní na $(-\infty;1)$, inflexe nemá

4

Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-G**

10. 1. 2018

KMA-MAT1

„VZOR"

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 bodů*) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{3n^2-6n+2}$.
2. (*5 b.*) Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku, celkem tedy dva obrázky):
   (a) $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = 1-(x+1)^2$,
   (b) $y = \cos x$, $y = \cos(-x)$, $y = -\cos x$.
3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f : y = \cos(\sin(3x)) + x\log_3 x$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.
4. (*10 b.*) Pro funkci $f : y = \dfrac{e^x}{x-1}$ určete $D(f)$, $D(f')$, maximální intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, maximální intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.
5. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{e^x}{x-1}$.

---

5) $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, spojitá na $(-\infty;1)$ a $(1;+\infty)$

- pokud má svislou as., tak jedině v 1:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{e^x}{x-1} = \left[\dfrac{e}{0^-}\right] = -\infty \Rightarrow$ ano, svislá as. $\boxed{x=1}$

- as. se směrnicí: $\boxed{\text{pro } x\to-\infty}$

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{e^x}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2-x} = \left[\dfrac{0}{\infty}\right] = 0$

$q = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-kx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x-1} - 0 = \left[\dfrac{0}{-\infty}\right] = 0$

pro $x\to-\infty$ má graf fce f as. $\boxed{y=0}$ osa x

$\boxed{\text{pro } x\to+\infty}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2-x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=}$

$\overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} = \left[\dfrac{\infty}{2}\right] = +\infty \Rightarrow$ v tomto směru as. nemá