Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-I**

17. 1. 2018

KMA-MAT1

VZOR

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). ~~Kromě prvního příkladu nepište do oblasti zadání~~ (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 b.*) Určete $D(f)$, základní periodu a načrtněte graf funkce $f : y = 1 + \cos(2x - \pi)$.
2. (*5 b.*) Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{5 \sin 3x}{\ln(-8x + 8)}$.
3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f : y = \ln(5 - 2x) - \dfrac{\cos x}{e^{5x}}$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.
4. (*10 b.*) Pro funkci $f : y = \dfrac{2x^2}{x+3}$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.
5. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{2x^2}{x+3}$.

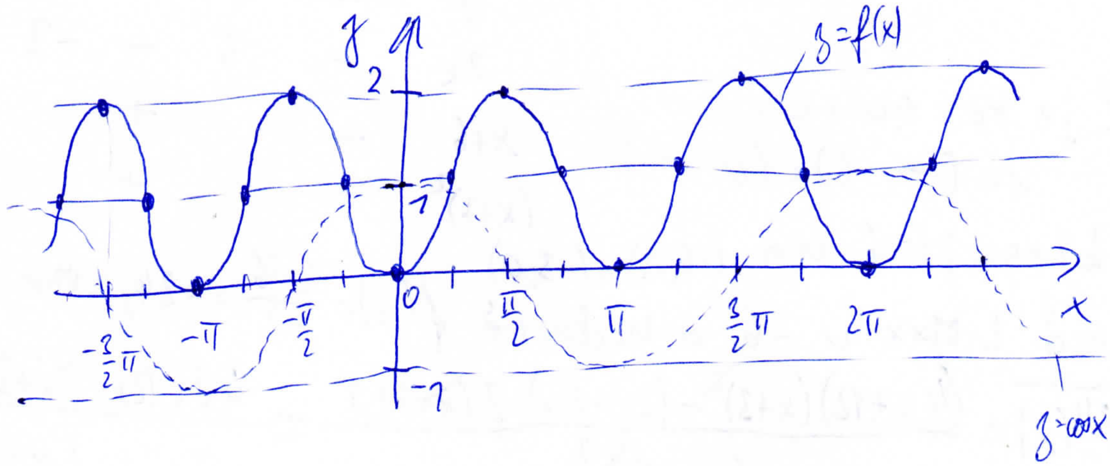
---

1. $f: y = 1 + \cos(2x - \pi) \to y = 1 + \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

posun o 1 nahoru; poloviční perioda; posun o $\frac{\pi}{2}$ doprava

$D(f) = \mathbb{R}$

$p_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$



2. $f: y = \dfrac{5 \sin 3x}{\ln(-8x+8)}$

$5 \cdot \sin 3x$: $x \in \mathbb{R}$

$\ln(-8x+8)$: $-8x+8 > 0$, $-8x > -8$, $-x > -1$, $x < 1$

$\div$: $\ln(-8x+8) \neq 0$, $-8x+8 \neq 1$, $-8x \neq -7$, $x \neq \frac{7}{8}$

$D(f) = (-\infty; 1) \setminus \left\{\frac{7}{8}\right\}$

$D(f) = \left(-\infty; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}, 1\right)$

③ $f(x) = \ln(5-2x) - \frac{\cos x}{e^{5x}}$, $D(f)$: $\ln$: $5-2x>0$, $-2x>-5$, $x<\frac{5}{2}$

$\cos x$; $x\in\mathbb{R}$

e^{5x}: $x\in\mathbb{R}$

$\div$: $e^{5x}\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$

$D(f) = (-\infty, \frac{5}{2})$

$$f'(x) = \frac{1}{5-2x}\cdot(5-2x)' - \frac{-\sin x\cdot e^{5x} - \cos x\cdot e^{5x}\cdot 5}{(e^{5x})^2}$$

$$= \frac{-2}{5-2x} + \frac{\sin x\cdot e^{5x} + 5\cdot\cos x\, e^{5x}}{(e^{5x})^2} = \frac{-2}{5-2x} + \frac{\sin x + 5\cdot\cos x}{e^{5x}}$$

$D(f') = D(f)$ (sama o sobě má def. obor $x\neq\frac{2}{5}$, ale zde je brána jako derivace f, a tak $D(f')\subset D(f)$)

④ $f: y = \frac{2x^2}{x+3}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, spojitá na $(-\infty;-3)$ a $(-3;+\infty)$

$$f'(x) = \frac{4x(x+3) - 2x^2\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{4x^2+12x-2x^2}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x}{(x+3)^2} = \frac{2x(x+6)}{(x+3)^2},\ D(f')=D(f)$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x(x+6)=0$

$x=0$ $x=-6$

		-6		-3		0	
f		L.Max				L.Min	
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+6$	$-$		$+$		$+$		$+$
$(x+3)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$

f je rostoucí na $(-\infty;-6)$ a $(0;+\infty)$

klesající na $(-6;-3)$ a $(-3;0)$

má L.Max v -6 o hodnotě $f(-6) = \frac{2\cdot 36}{-3} = -24$, L.Min v 0 o h. $f(0)=0$

$$f''(x) = \frac{(4x+12)(x+3)^{\cancel{2}} - (2x^2+12x)\cdot 2\cancel{(x+3)}\cdot 1}{(x+3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4x^2+12x+12x+36-4x^2-24x}{(x+3)^3} =$$

$$= \frac{36}{(x+3)^3},\ D(f'')=D(f),\ \text{nemá nulové b.}$$

		-3	
f	$\frown$		$\smile$
f''	$-$		$+$
36	$+$		$+$
$(x+3)^3$	$-$		$+$

f je konkávní na $(-\infty;-3)$

konvexní na $(-3;+\infty)$

nemá inflexe

Zisk ..... b. z 30 možných $\Longrightarrow$ .....

Písemka **P2-2017-I**

17. 1. 2018

KMA-MAT1

VZOR

(čitelně jméno a studijní skupina)

Podepište se vpravo nahoře (stejně tak i na každém dalším papíru). ~~Kromě prvního příkladu~~ nepište do oblasti zadání (mezi linky). Nepoužívejte červenou propisku. Pište čitelně. Řešení každého příkladu řádně označte.

---

1. (*5 b.*) Určete $D(f)$, základní periodu a načrtněte graf funkce $f : y = 1 + \cos(2x - \pi)$.

2. (*5 b.*) Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{5 \sin 3x}{\ln(-8x + 8)}$.

3. (*5 b.*) Derivujte funkci $f : y = \ln(5 - 2x) - \dfrac{\cos x}{e^{5x}}$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.

4. (*10 b.*) Pro funkci $f : y = \dfrac{2x^2}{x+3}$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

5. (*5 b.*) Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{2x^2}{x+3}$.

---

(5) $f: \dfrac{2x^2}{x+3}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, spojitá na $(-\infty, -3)$ a $(-3, +\infty)$

svislou asymptotu tedy může mít jen v -3;

Ověříme: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x^2}{x+3} = \left[\dfrac{18}{0^-}\right] = -\infty$

Ano, f má svislou as. $\boxed{x = -3}$

Pro $x \to -\infty$:

$k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x+3} = \left[\dfrac{-\infty}{-\infty}\right] \overset{LP}{=}$

$\overset{LP}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{1} = \underline{2}$

$q = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x+3} - 2 \cdot x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 2x^2 - 6x}{x+3} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x}{x+3} = \left[\dfrac{\infty}{-\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6}{1} = \underline{-6}$

as. $\boxed{y = 2x - 6}$ pro $x \to -\infty$

Pro $x \to +\infty$: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x+3} = 2$

$q = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-6x}{x+3} = -6$

pro $x \to +\infty$ má graf f stejnou as. jako pro $x \to -\infty$, tedy $\boxed{y = 2x - 6}$